ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИВАНОВСКАЯ ПОЖАРНО-СПАСАТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ
ПРОТИВОПОЖАРНОЙ СЛУЖБЫ МИНИСТЕРСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ДЕЛАМ ГРАЖДАНСКОЙ ОБОРОНЫ, ЧРЕЗВЫЧАЙНЫМ СИТУАЦИЯМ
И ЛИКВИДАЦИИ ПОСЛЕДСТВИЙ СТИХИЙНЫХ БЕДСТВИЙ»

О. В. ХОНГОРОВА

МАТЕМАТИКА.
ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Иваново 2020

УДК 519.21
ББК 22.171

Рецензенты:
Пашкова Т.В. – доцент кафедры фундаментальной физики и нанотехнологий ФГБОУ ВО Ивановского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент
Шварев Е.А. – доцент кафедры основ государственного надзора и экспертизы пожаров (в составе УНК «Государственный надзор») майор внутренней службы

Издается по решению Редакционно-издательского совета Ивановской пожарно-спасательной академии
(*Протокол № 5 от 22.10.2020*)

Хонгорова, О.В.
Математика. Введение в теорию вероятностей: учебное пособие / О.В. Хонгорова. – Иваново: ФГБОУ ВО Ивановская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России, 2020. – 98 с.

Учебное пособие содержит теоретические сведения и практические задания по основным разделам теории вероятностей, предусмотренным учебной программой по специальности 20.02.04 «Пожарная безопасность» квалификация базовой подготовки «Техник».

Целью учебного пособия является оказание помощи обучающимся, изучающим основы теории вероятностей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для учебного и методического обеспечения и проведения учебного процесса по специальности 20.02.04 «Пожарная безопасность» квалификации базовой подготовки «Техник».

Целью написания данного пособия является разработка современной учебно-методической литературы нового поколения, которая предполагает использование дифференцированного подхода к обучению обучающихся с различным уровнем математической подготовки. Данное пособие будет полезно для преподавателей и обучающихся.

Теория вероятностей – это раздел математики, занимающийся изучением закономерностей, которыми подчиняются однородные случайные события, и вычислением степени возможности различных случайных результатов.

Вероятностный метод в науке не противопоставляет себя классическому методу точных наук, а является его дополнением, позволяющим глубже анализировать явления с учетом присущих им элементов случайности.

Решение задач по теории вероятностей у обучающихся часто сопряжено со многими трудностями. Помочь им преодолеть эти трудности, научить применять теоретические знания к решению задач по всем разделам теории вероятностей основная задача данного пособия.

Представленное учебное пособие предназначено как для практических занятий, так и для самостоятельного изучения базового курса теории вероятностей, и соответствует стандартной программе этого курса. В пособии представлено краткое изложение основных понятий теории вероятностей, необходимых для решения задач. Кроме того, пособие содержат задачи по теории вероятностей с подробным решением, при этом в конце каждой главы предложены задания для самостоятельной работы обучающихся, способствующих лучшему усвоению материала.

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

1.1. Основные понятия. Исторические сведения.

Комбинаторика – это раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов в соответствии с каким-либо правилом. Например, сколькими способами можно выбрать 6 карт из колоды, состоящей из 36 карт; или сколькими способами можно составить очередь, состоящей из10 человек и т.д. Каждое правило в комбинаторике определяет способ построения некоторой конструкции, составленной из элементов исходного множества и называемой комбинацией. Основная цель комбинаторики состоит в подсчете количества комбинаций, которые можно составить из элементов исходного множества в соответствии с заданным правилом. Простейшими примерами комбинаторных конструкций являются перестановки, размещения и сочетания.

Комбинаторика возникла в XVI веке. В жизни привилегированных слоев общества того времени большое место занимали азартные игры. В карты и кости выигрывали и проигрывали золото и бриллианты, дворцы и имения, дорогие украшения. Широко были распространены всевозможные лотереи. Понятно, что первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр – вопросов, сколькими способами можно выбросить данное число очков, бросая две или три кости, или сколькими способами можно получить двух королей в данной карточной игре. Эти и другие проблемы азартных игр явились движущей силой в развитии комбинаторики и развивающейся одновременно с ней теории вероятностей.

Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Тарталья. Он составил таблицу, показывавшую, сколькими способами могут выпасть r костей. Однако при этом не учитывалось, что одна и та же сумма очков может быть получена разными способами (например, $1 + 3 + 4 = 4 + 2 + 2$).

Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в XVII веке французские ученые Паскаль и Ферма. Исходным пунктом их исследований тоже были проблемы азартных игр. Особенно большую роль сыграла задача о разделе ставки, которую предложил Паскалю его друг Шевалье де Мере, страстный игрок. Проблема состояла в следующем: «матч» в орлянку ведется до шести выигранных партий; он был прерван, когда один игрок выиграл 5 партий, а другой – 4; как разделить ставку? Было ясно, что раздел в отношении 5 : 4 несправедлив. Применив методы комбинаторики, Паскаль решил задачу в общем случае, когда одному игроку остается до выигрыша r партий, а второму s партий. Другое решение задачи дал Ферма.

Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Якова Бернулли, Лейбница и Эйлера. Однако и у них основную роль играли приложения к различным играм (лото, солитер и др.). За последние годы комбинаторика переживает период бурного развития, связанного с общим повышением интереса к проблемам дискретной математики. Комбинаторные методы используются для решения транспортных задач, в частности задач по составлению расписаний; для составления планов и реализации продукции. Комбинаторика используется ля составления и декодирования шифров и для решения других проблем теории информации.

Термин «комбинаторика» был введён в математический обиход Лейбницем, который в 1666 году опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве». Сегодня комбинаторные методы используются для решения проблем теории информации, задач линейного программирования, для решения транспортных задач и много другого. Комбинаторные задачи представляют богатый материал для изучения основных конструкций, методов и приемов программирования, позволяют показать не только красоту математики, но и возможности новых компьютерных технологий при решении практических математических задач. Задачи математики, к которым относятся многие задачи практического программирования, часто сводятся к перебору различных комбинаторных конфигураций объектов и выбору среди них наилучшего, с точки зрения условия той или иной задачи. Поэтому знание алгоритмов генерации наиболее распространенных комбинаторных конфигураций является необходимым условием успешного решения задач в целом.

Определение. ***Комбинаторика*** – раздел математики, изучающий различные комбинации элементов, обладающие определёнными свойствами.

Основной вопрос комбинаторики - сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

В отличие от множеств комбинации элементов могут содержать одинаковые (повторные) элементы.

1.2. Задача, приводящая к понятию факториала. Определение факториала.

Рассмотрим решение задачи: «Сколько разных *n*-значных чисел можно записать из n разных цифр?»

Из одной цифры 1 можно получить лишь одно однозначное число: *1*.

Из 2-х цифр 1 и 2 можно получить 2 двузначных числа: *12* и *21*. Это можно рассматривать так: к предыдущему случаю с числом 1 можно дописать 2 справа или слева, т.е. предыдущий случай надо умножить на 2 ($1\cdot2$).

Из 3 цифр 1,2 и 3 можно получить 6 трехзначных чисел: *312, 132, 123 и 321, 231, 213*. Это можно рассматривать так: к предыдущему случаю в каждом из двузначных чисел 3 можно дописать или слева, или справа, или посредине. Т.е. предыдущий случай надо умножить на 3 ($1\cdot2\cdot3$).

Нетрудно заметить закономерность: в каждом следующем случае ответ будет в n раз больше, чем в предыдущем. Получаем формулу для произвольного числа n: $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$.

Ответ: $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$

Определение. Произведение всех натуральных чисел от 1 до *n* включительно называется ***n-факториалом*** и обозначается ***n!***

Факториал произошло от латинского «***factorialis***», что означает «*умножающий*».

Таким образом: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (1.1)

Например,

$$1! = 1$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Свойства факториала

1°. Считается, что

$$0! = 1.$$

2°. Факториал отрицательного числа не существует.

3°. Основное свойство факториала:

$$n! = (n-1)! \cdot n$$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Доказательство:

$$(n-1)! \cdot n = \left(\mathbf{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1)}\right) \cdot n = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}_{\text{произведение нат. чисел от 1 до } n} = n!$$

$$n! \cdot (n+1) = \underbrace{\mathbf{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n} \cdot (n+1)}_{\text{произведение нат. чисел от 1 до } n+1} = (n+1)!$$

Пример 1.1. Вычислить:

$$\frac{2000!}{1999!} = ?$$

Решение: если пользоваться определением факториала, то мы должны последовательно перемножить все натуральные числа от 1 до 2000 в числителе и от 1 до 1999 в знаменателе. Это будет очень громоздко! Лучше воспользоваться основным свойством факториала.

$$\frac{2000!}{1999!} = \frac{(2000-1)!\cdot 2000}{1999!} = \frac{\cancel{1999!}\cdot 2000}{\cancel{1999!}} = 2000$$

Или так:

$$\frac{2000!}{1999!} = \frac{(1999+1)!}{1999!} = \frac{\cancel{1999!}\cdot (1999+1)}{\cancel{1999!}} = 1999 + 1 = 2000$$

Пример 2. Упростить:

$$\frac{(k+4)!\cdot (k+5)}{(k+6)!}$$

Решение: Воспользуемся свойством факториала, получим

$$\frac{(k+4)!\cdot (k+5)}{(k+6)!} = \frac{(k+4)!\cdot ((k+4)+1)}{(k+6)!} = \frac{(k+5)!}{(k+6)!} = \frac{\cancel{(k+5)!}}{\cancel{(k+5)!}\cdot (k+6)} = \frac{1}{k+6}$$

1.3. Основные правила комбинаторики

При решении комбинаторных задач часто применяются два важных правила.

<u>Правило сложения:</u> Если некоторый элемент «***а***» можно выбрать ***m*** числом способов, а другой элемент «***в***» – ***n*** числом способов, то выбор элемента «**либо *а*, либо *в***» можно сделать (***m*** + ***n***) числом способов.

Пример 1.2. В группе 20 девушек и 5 юношей. Каким числом способов можно выбрать старосту?

Решение: *Старостой может быть выбрана одна из 20 девушек или один из 5 юношей, а значит, общее число способов выбора старосты равно 20+5=25*

При использовании правила суммы в такой формулировке нужно следить, чтобы ни один из способов выбора объекта A не совпадал с каким-нибудь способом выбора объекта B. Если такие совпадения есть, то правило суммы утрачивает силу и получается лишь $(m + n - k)$ способов выбора, где k-число совпадений.

Пример 1.3. В академии работают 76 преподавателей. Из них 49 знают английский язык, 32 – немецкий и 15 – оба языка. Сколько преподавателей не знает ни английского, ни немецкого языков?

Решение: *Английский или немецкий язык знают 49 + 32 – 15 = 66 преподавателей. А значит, не знают ни одного из этих языков 76 – 66 = 10 преподавателей.*

Правило умножения: Если некоторый элемент «***а***» можно выбрать ***m*** числом способов, а затем элемент «***в***» – ***n*** числом способов, то выбор пары «***а* и *в***» можно осуществить (***m·n***) числом способов.

Пример 1.4. В группе 30 человек. Необходимо выбрать старосту и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: *Старостой может быть выбран любой из 30 учащихся, т.е. существует 30 способов выбора старосты. После того как староста уже выбран, его заместителя можно выбрать любого из оставшихся 29 учащихся. Таким образом, одному способу выбора старосты соответствуют 29 способов выбора заместителя старосты. Следовательно, общее число способов выбора старосты и его заместителя равно 30 ·29 = 870.*

Правила сложения и умножения имеют место для любого конечного числа элементов.

Пример 1.5. Сколько трёхзначных чётных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5,6, если цифры могут повторяться?

Решение: *При составлении трёхзначного числа авс из данных цифр вместо а можно взять любую цифру, кроме нуля (6 возможностей), вместо в можно взять любую из них (7 возможностей), вместо с можно взять любую из цифр 0,2.4.6 (4 возможности).*

Таким образом, согласно правилу умножения, имеем 6·7·4= 168 способов составить число, удовлетворяющее условию задачи.

Часто при решении комбинаторных задач работают оба правила.

Пример 1.6. Имеются 20 изделий 1-го сорта и 30 изделий 2-го сорта. Необходимо выбрать два изделия одного сорта. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: *По правилу умножения, два изделия 1-го сорта можно выбрать 20·19=380 способами. Аналогично. Два изделия 2-го сорта можно выбрать 30·29=870 способами. Т.к. по условию задачи следует выбрать два изделия одного сорта, неважно какого, то общее число способов выбора изделий одного сорта равно 380 + 870 = 1250.*

Пример 1.7. Сколько однозначных, двузначных и трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3, если цифры могут повторяться?

Решение: *Очевидно, что из данных цифр можно составить только одно четное однозначное число – 2.*

При составлении двузначного числа ав из данных цифр вместо а можно взять любую цифру, кроме нуля (3 возможности), вместо в можно взять взять любую из цифр 0 и 2 (2 возможности). Таким образом, согласно правилу умножения, имеем 3·2= 6 способов составить нужное нам число.

При составлении трехзначного числа <u>авс</u> из данных цифр вместо <u>а</u> можно взять любую цифру, кроме нуля (3 возможности), вместо <u>в</u> можно взять любую из них (4 возможности), вместо <u>с</u> можно взять любую из цифр 0 и 2 (2 возможности). Таким ообразом, согласно правилу умножения, имеем 3·4·2= 24 способа составить число, удовлетворяющее условию задачи.

Применяя правило сложения, получим: 1 + 6 + 24 = 31

1.4. Соединения без повторений

Определение. Каждая конкретная комбинация, составленная из элементов данного конечного множества, называется ***выборкой*** или ***соединением***.

При этом если выбирают $\boldsymbol{m}$ элементов из $\boldsymbol{n}$ различных элементов, то говорят, что они образуют ***соединение из n элементов по m***. В зависимости от того, входят в соединение все $\boldsymbol{n}$ элементов или только их часть, а так же от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, различают 3 вида соединений: ***размещения, перестановки* и *сочетания***.

Размещения без повторений

Определение. ***Размещениями из n элементов по m*** $(0 \leq m \leq n)$ называются соединения, содержащие $\boldsymbol{m}$ различных элементов и отличающиеся или составом, или порядком их расположения.

Обозначение: A_n^m («а из эн по эм»)

Выведем формулу для подсчёта A_n^m.

Ясно, что на первое место можно поместить любой из $\boldsymbol{n}$ элементов. Таким образом, $A_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{n}$.

Если на первом месте стоит один из $\boldsymbol{n}$ элементов, то на второе место можно поместить один из $(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{1})$ оставшихся элементов. А значит, согласно правилу умножения, $A_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})$.

Рассуждая аналогично, получим: $A_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{3}} = \boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{2})$

$A_n^4 = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$

…………………………

$A_n^m = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-(m-1))$

Выведем более универсальную формулу, для чего умножим и разделим произведение, стоящее в правой части формулы, на $(n-m)!$. Получим:

$$A_n^m = \frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots\big(n-(m-1)\big)(n-m)!}{(n-m)!} =$$

$$= \frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots(m-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots 2\cdot 1}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Итак:

$$\boxed{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}} \qquad (1.2)$$

Пример 1.8. Сколько различных натуральных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что любая из цифр в написании числа встречается не более одного раза?

Решение: *Однозначных* - $A_5^1 = 5$

Двузначных - $A_5^2 = 5\cdot 4 = 20$

Трехзначных - $A_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$

Четырёхзначных - $A_5^4 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 120$

Пятизначных - $A_5^5 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$

По правилу сложения получаем: 5+20+60+120+120= 325

Перестановки без повторений

Определение. Размещения из ***n*** элементов по ***n*** называются ***перестановками из n элементов***.

Обозначение: P_n («пэ из эн»)

Так как любая перестановка содержит все n элементов, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов.

Выведем формулу для подсчёта P_n.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Таким образом:

$$\boxed{\mathbf{P_n = n!}} \qquad (1.3)$$

Пример 1.9. Для укомплектования 12 мобильных средств пожаротушения требуется распределить 12 предметов различного пожарного оборудования и инструментов. Сколькими способами можно это сделать?

Решение: $P_{12} = 12!$

Пример 1.10. Сколькими способами можно расставить на полке в один ряд семь книг, среди которых четыре книги разных авторов и трёхтомник одного автора, так, чтобы книги трёхтомника стояли рядом?

Решение: *Если считать трехтомник за одну книгу, то будет 5 книг, которые можно переставить* $P_5 = 5! = 120$ *способами. Т.к. книги трёхтомника можно переставлять между собой* $P_3 = 3! = 6$ *способами, то по правилу умножения, всего возможно* $120 \cdot 6 = 720$ *перестановок* /

Сочетания без повторений

Определение. ***Сочетаниями из n элементов по m*** $(0 \le m \le n)$ называются соединения ***m*** различных элементов, отличающиеся лишь составом (порядок не играет роли).

Обозначение: $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}}$ («цэ из эн по эм»)

Выведем формулу для подсчёта $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}}$.

Если взять все сочетания из n элементов по m и в каждом из них упорядочить элементы всеми возможными способами (сделать все перестановки), то получатся все размещения из n элементов по m.

Значит, $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$

Отсюда,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Таким образом:

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}} \tag{1.4}$$

Очевидно: $\mathrm{C}_\mathrm{n}^0 = 1$ и $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{n} = 1$

Пример 1.11. Сколькими способами курсант может выбрать две спецдисциплины по выбору из пяти имеющихся?

Решение: Вычислим по формуле (1.4)

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10$$

Пример 1.12. В соревнованиях по пожарно-прикладному спорту участвуют 8 команд. Насколько более продолжительным будет турнир, организованный по круговой системе, чем по олимпийской?

Решение: *При проведении турнира по круговой системе каждый участник встречался с каждым и порядок их вхождения в пару не важен. Следовательно, по круговой системе потребуется провести 28 встреч* (C_8^2)*, а по олимпийской только - 7 (четыре встречи в* $\frac{1}{4}$ *финала, две - в полуфинале и одна в финале*)

1.5. Соединения с повторениями

Пусть дано множество M = $\{\mathrm{a}_1; \dots; \mathrm{a}_n\}$. Из данных $\boldsymbol{n}$ элементов составим комбинацию, в которой $\boldsymbol{a_1}$ встречается $\boldsymbol{m_1}$ раз, $\boldsymbol{a_2}$ – $\boldsymbol{m_2}$ раз и так далее до $\boldsymbol{a_n}$, который встречается $\boldsymbol{m_n}$ раз. Обозначим $\boldsymbol{m = m_1 + m_2 + \dots + m_n}$.

Размещения с повторениями

В случае размещений какие-то $\boldsymbol{m_i}$ могут оказаться равны нулю, поэтому $\boldsymbol{m}$ может оказаться как меньше $\boldsymbol{n}$, так и равно или больше $\boldsymbol{n}$.

Число различных размещений из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{m}$ с повторениями обозначим $\widetilde{A_n^m}$. Найдём это число.

Пусть $m = 1$. На одно место можно поместить любой из $\boldsymbol{n}$ элементов, поэтому имеется $\boldsymbol{n}$ возможностей, т.е. $\widetilde{A_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{1}}} = \boldsymbol{n}$.

Для выбора второго элемента имеется $\boldsymbol{n}$ возможностей, т.к. один и тот же элемент можно выбрать снова. А значит, два элемента из $\boldsymbol{n}$ элементов можно выбрать $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n^2}$ числом способов, т.е. $\widetilde{A_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{2}}} = \boldsymbol{n^2}$. Рассуждая аналогично, приходим к формуле:

$$\boxed{\widetilde{A_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}} = \boldsymbol{n^m}} \tag{1.5}$$

Пример 1.13. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 1 и 2?

$\widetilde{A_2^3} = 2^3 = 8$ (*111, 112,…*)

Пример 1.14. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3?

$\widetilde{A_3^2} = 3^2 = 9$

Перестановки с повторениями

В случае перестановок в соединении присутствуют все $\boldsymbol{n}$ элементов, поэтому $\boldsymbol{m}$ обязательно больше $\boldsymbol{n}$. Если $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$, то каждый элемент встречается ровно один раз, что соответствует перестановкам без повторений

Число всех перестановок из $\boldsymbol{m}$ элементов с повторениями принято обозначать $\tilde{P}_{m_1, m_2, \ldots, m_n}$. Найдём это число.

Если бы все $\boldsymbol{m}$ элементов были между собой различны, то таких перестановок было бы $\boldsymbol{m! = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)!}$ Но так как не все элементы различны, то их будет меньше.

Если бы все m_1 элементы были бы различны, то число перестановок возросло бы $m_1!$ раз. Если бы все m_2 элементы были бы различны, то число перестановок возросло бы $m_2!$ раз. А если бы m_1 и m_2 элементы были бы различны, то число перестановок возросло бы $m_1! \cdot m_2!$ раз. Учитывая все m_i, получим, что число перестановок возросло бы в $m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_n!$ раз. А значит, искомое число во столько раз меньше.

Итак:

$$\boxed{\tilde{P}_{m_1,m_2,,,,,m_n} = \frac{(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_n!}} \tag{1.6}$$

Пример 1.15. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если 1 встречается 1 раз, 2 – 2 раза, 3 – 2раза?

$\widetilde{\mathrm{P}}_{1,2,2} = \frac{(1+2+2)!}{1! \cdot 2! \cdot 2!} = 30$

Пример 1.16. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «***математика***», чтобы получить всевозможные различные наборы букв?

Т.к. в слове «математика» десять букв, из них «м» встречается 2 раза, «а» - 3 раза, «т» - 2 раза, «е», «и» и «к» - по разу, то задача сводится к вычислению $\widetilde{\mathrm{P}}_{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200$

Сочетания с повторениями

Число сочетаний из n элементов по m с повторениями обозначают $\tilde{\mathrm{C}}_n^m$. Найдём его.

Так как порядок расположения элементов не существенен, то сначала будем писать все a_1, затем – a_2 и так далее. Каждому такому сочетанию поставим во взаимно-однозначное соответствие символ (двоичную перестановку из элементов 0 и 1):

$$\underbrace{11\ldots1}_{m_1}0\underbrace{11\ldots1}_{m_2}0\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{m_n}$$

Очевидно, единиц записано $\boldsymbol{m_1} + \boldsymbol{m_2} + \boldsymbol{\ldots} + \boldsymbol{m_n} = \boldsymbol{m}$ штук, а нулей – $\boldsymbol{(n-1)}$. Если какой-то элемент не входит в наше сочетание, то вместо соответствующей групы единиц пишется нуль.

Например: M = {a;b;c}

1) aabccc (11010111)
2) aaaacc (11110011)
3) bbbccc (01110111)
4) bbbbbb (01111110)

Т.о., различных сочетаний столько, сколько можно составить двоичных перестановок из цифр 0 и 1 с повторениями, т.е. $\tilde{C}_n^m = \tilde{P}_{m,n-1}$.

А значит,

$$\boxed{\tilde{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}} = \frac{(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!}{\boldsymbol{m}!\cdot(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!}} \tag{1.7}$$

Пример 1.17. Имеются конфеты трёх сортов в коробках. Сколько можно составить различных наборов из пяти коробок?

$\tilde{C}_3^5 = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \ldots = 21$

1.6. Задания для самостоятельной подготовки

1. Сколько нужно взять предметов пожарного оборудования и инструмента (n), чтобы число всех перестановок из этих предметов:

а) не превышало 100;

б) было больше 200.

2. В президиум избрали 3 человека. Каким числом способов они могут распределить обязанности председателя, секретаря и члена?

3. В дежурной части в данный момент имеется 5 офицеров, 20 оперативников и 4 собаки. На вызов срочно требуется 1 офицер, 4

оперативника, 1 собака. Сколькими способами N возможно выбрать сотрудников на срочный вызов?

4. На пожаре для выполнения специальных работ на 7 позициях выделено 7 участников тушения пожара. Сколькими способами можно распределить участников тушения пожара?

5. Ранги пожаров по их сложности определяются условными номерами 1, 2, 3, 4, 5, чем выше номер, тем сложнее пожар. Сколько пятизначных чисел можно составить из этих чисел без повторений?

6. Сколько всех четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 5, 6, 7?

7. Сколько существует двузначных чисел, имеющих обе чётные цифры?

8. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

9. Сколько существует шестизначных чисел, которые делятся на 5?

10. Сколько различных натуральных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что любая из цифр в написании числа встречается не более одного раза?

11. Любой телефонный номер дежурной части ПЧ №1 состоит из пяти цифр. Сколько всего телефонных номеров, не содержащих других цифр, кроме 1, 2 и 3?

12. Сколькими способами можно расположить в ряд 2 зелёные и 4 красные лампочки?

13. Сколькими способами можно выбрать четыре монеты из 4-х пятикопеечных и 4-х десятикопеечных монет?

14. Сколькими способами можно разместить 8 пожарных в 2 аэромобиля?

15. В кондитерской имеется 5 сортов пирожных. Сколькими способами можно выбрать набор из 4-х пирожных?

16. Сколькими способами можно переставить буквы в слове ***какао***, чтобы получились новые слова?

17. Есть 5 сигнальных флажков. Сколькими различными вариантами может быть подан сигнал, если использовать разное количество флажков и в любом порядке? Однако важно понимать, что каждый флаг, поднятый в одном порядке, означает совершенно иное, чем тот же флаг, но поднятый в другом порядке.

18. Сколькими способами можно рассадить студентов, нарушающих дисциплину, на первый ряд, состоящий из 4 мест?

19. Вычислите:

1) $A_7^3 + A_6^3 + A_5^3$; 2) $\frac{A_6^5 + A_6^4}{A_6^3}$; 3) $P_6 \div (P_7 - P_3)$;

4) $\frac{C_{14}^9 + C_{14}^{10}}{C_{15}^{10}}$; 5) $\frac{P_6(C_7^5 + C_7^4)}{C_{10}^7}$; 6) $C_5^3 \cdot C_4^2 + C_4^2 \cdot C_3^1 + C_3^1 \cdot C_2^0$;

7) $(\frac{P_5}{A_5^4} + \frac{P_4}{A_5^3}) \cdot C_5^4$.

20. Упростите: 1) $\frac{A_n^k (n-k)!}{(n-1)!}$; 2) $\frac{2P_n}{P_{n-2} \cdot P_2}$; 3) $\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \cdot n!$

21. Решите уравнение:

1) $A_{n-2}^3 = 4A_{n-3}^2$;

2) $P_{n+2} = 132 A_n^k \cdot P_{n-k}$;

3) $5C_n^3 = C_{n+2}^4$;

4) $A_n^4 = 6A_{n-2}^2$;

5) $A_n^4 \cdot P_{n-4} = 42 P_{n-2}$.

22. Решите систему: $\begin{cases} A_{m-2}^n \div A_{m-2}^{n-1} = 3, \\ C_{m-2}^n \div C_{m-2}^{n-1} = 0{,}6. \end{cases}$

ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. События и действия над ними

Проводится случайный эксперимент при одном и том же комплексе условий. Обозначим через Ω множество всех возможных элементарных исходов ω, которые могут произойти в результате каждого испытания.

Любое подмножество A, составленное из элементарных исходов, называется *событием*. Говорят, что событие произошло, если произошло хотя бы одно из элементарных событий, входящих во множество Ω.

Определение. Случайным (возможным) называется событие, которое в результате опыта (испытания, эксперимента) может произойти или не произойти.

При этом стоит понимать, что событие – это не какое-то происшествие, а возможный исход. События, которыми может закончиться опыт, также называют исходами.

В дальнейшем события будем обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, …

При этом выделяют два особых события:

• достоверное событие – событие, которое обязательно произойдет при проведении опыта – это и есть Ω;

• невозможное событие – событие, которое в результате опыта произойти не может – будем обозначать $\varnothing$.

Определение. События называются равновозможными, если в результате испытания ни одно из этих событий не является объективно более возможным.

Определение. Несколько событий называются единственно возможными, если в результате испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них.

Определение. Несколько событий образуют полную группу (полную систему) событий, если они являются единственно возможными и несовместными исходами испытания. Это означает, что в результате испытания обязательно должно произойти одно и только одно из этих событий.

Алгебра событий

Определение. Суммой $A + B$ двух событий A и B называют событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из событий A или B.

Для наглядного понимания данного определения обычно используют так называемые диаграммы Эйлера – Венна.

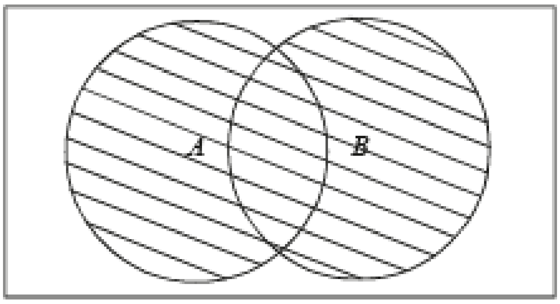


Рис. 1. Сумма двух событий

Суммой нескольких событий называется событие, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из этих событий.

Определение. Произведением AB событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошло и событие A, и событие B.

Для наглядного понимания данного определения обычно используют так называемые диаграммы Эйлера – Венна.

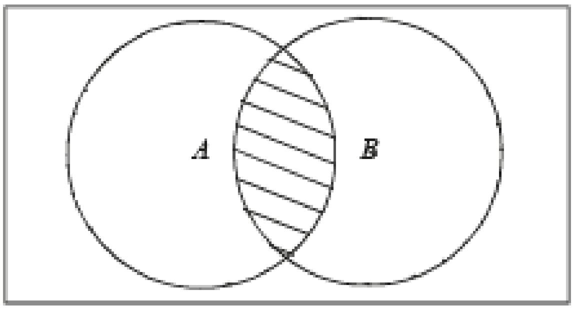


Рис. 2. Произведение двух событий

Аналогично произведением нескольких событий называется событие, заключающееся в том, что произошли все эти события.

Определение. Разностью $A \backslash B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что A произошло, а B – нет.

Для наглядного понимания данного определения обычно используют так называемые диаграммы Эйлера – Венна.

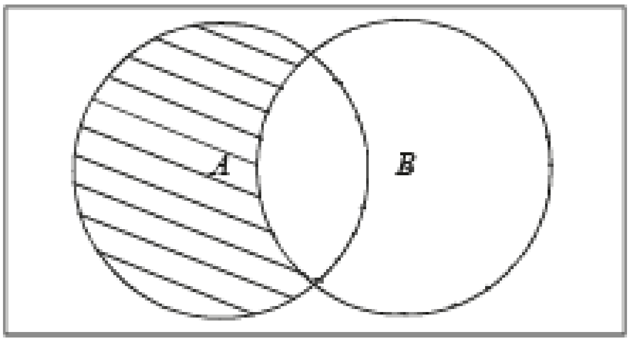


Рис. 3. Разность двух событий

Определение. События A и B называются совместными, если они могут произойти оба в результате одного опыта. В противном случае события называются несовместными.

Определение. Говорят, что несовместные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, если в результате опыта обязательно произойдет хотя бы одно из событий этой группы.

Определение. События A и $\overline{\mathrm{A}}$ называются противоположными, если их сумма – это достоверное событие, а произведение – невозможное событие, т.е.

$$\mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}} = \Omega,$$

$$\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}} = \varnothing. \tag{2.1}$$

Пример 2.1. Обозначим через ω_i событие, состоящее в выпадении i очков при однократном бросании игрального кубика. Пусть событие А состоит в том, что выпали 2, 3 или 4 очка, событие B – в выпадении 3 или 6 очков. Требуется:

1) выписать достоверное событие, события $\overline{\mathrm{A}}$ и $\overline{\mathrm{B}}$;

2) найти сумму, произведение и разность событий А и B.

Решение. 1) Тот факт, что событие А состоит в том, что выпали 2, 3 или 4 очка, обозначим так: $\mathrm{A} = \{2, 3, 4\}$.

Аналогично получим, что $\mathrm{B} = \{3, 6\}$.

Очевидно, что достоверным событием является следующее:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Для получения противоположного события $\overline{\mathrm{A}}$ необходимо выписать события, которые не входят в A, но входят в **Ω**. Таким образом, получаем, что

$$\overline{\mathrm{A}} = \{1, 5, 6\}.$$

Аналогично находим, что $\overline{\mathrm{B}} = \{1, 3, 4, 5\}$.

2) В соответствии с приведенными выше определениями будем иметь

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \{2, 3, 4\},$$

$$\mathrm{AB} = \{3\},$$

$$\mathrm{A} \backslash \mathrm{B} = \{2, 4\},$$

$$\mathrm{B} \backslash \mathrm{A} = \{6\}. \blacksquare$$

При решении задач полезными являются законы де Моргана:

$$\overline{\mathrm{A} + \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}}\overline{\mathrm{B}},$$

$$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}}, \qquad (2.2)$$

использование которых может существенно упростить решение многих задач.

2.2. Определение вероятности

Рассмотрим несколько определений вероятности события. Отметим, что вероятность является количественной характеристикой возможности наступления некоторого события.

Как было сказано ранее, для практической деятельности важно уметь сравнивать события по степени возможности их наступления. Например, «выигрыш по одному билету» и «выигрыш по каждому из десяти приобретенных билетов» лотереи обладают разной степенью возможности их наступления.

Определение. Численная мера степени объективной возможности наступления события называется вероятностью события.

Чтобы измерить эту «вероятность», используют несколько подходов. Начнем с классического.

Классическое определение вероятности

Рассмотрим некоторый опыт с конечным числом n равновозможных исходов. При этом в m случаях происходит некоторое событие A.

Определение. Пусть исходы некоторого испытания образуют полную группу событий и равновозможны, т. е. единственно возможны, несовместны и равновозможны. Такие исходы называют элементарными исходами, случаями или шансами. При этом говорят, что испытание сводится к схеме случаев.

Определение. Случай называется благоприятным событию A, если появление этого случая ведет за собой появление события A.

Определение (классической вероятности). Вероятностью события называется отношение числа случаев, благоприятствующих ему, к общему числу случаев, т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (2.3)$$

Здесь $P(A)$ – вероятность события A, m – число случаев, благоприятствующих событию A, n – общее число случаев.

Пример 2.2. В условиях примера 2.1 найти вероятности событий A и B.

Решение. В данном примере $n = 6$, так как достоверное событие Ω состоит из 6 элементарных событий.

Вероятность события A находится так: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, так как событию A благоприятствуют 3 элементарных события.

Аналогично находим вероятность события B: $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. ■

Статистическое определение вероятности

Определение (статистической вероятности). Вероятностью события A называется относительная частота (частность) появления этого события в n произведенных испытаниях, т.е.

$$P(A) = w(A) = \frac{m}{n}. \qquad (2.4)$$

Здесь $w(A)$ – относительная частота события A, m – общее число испытаний, в которых появилось событие A, n – общее число испытаний.

Геометрическое определение вероятности

Определение. Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события A, к мере всей области, т.е.

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \tag{2.5}$$

Здесь под мерой $\mu(A)$ может пониматься, например, площадь некой фигуры или объем тела.

Пример 2.3. В квадрате со стороной a наудачу выбирается точка. Найти вероятность того, что выбранная точка окажется внутри вписанного круга.

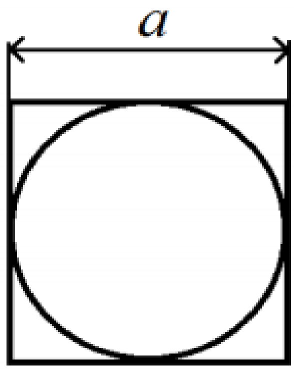


Рис. 4. Иллюстрация к примеру 2.3.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что выбранная точка оказалась во вписанном круге. При этом достоверному событию соответствует квадрат с площадью a^2, событию A – круг площади $\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$. Поэтому вероятность события А находится так:

$$P(A) = \frac{\pi a^2/4}{a^2} = \frac{\pi}{4}$$

■

При любом определении вероятности выполняются следующие свойства:

1. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т.е.

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Вероятность достоверного события равна 1, т.е.

$$P(\Omega) = 1.$$

3. Вероятность невозможного события равна 0, т.е.

$$P(\varnothing) = 0.$$

2.3. Подсчет классической вероятности с помощью правил комбинаторики

Важно отметить, что классическое определение (формулу) следует рассматривать не как определение, а как метод вычисления вероятностей для испытаний, сводящихся к схеме случаев.

Для применения классического определения вероятностей необходимо знать число благоприятных и всех возможных исходов, которые как раз и возможно найти с помощью формул и правил комбинаторики. Рассмотрим несколько примеров.

П р и м е р ы

1. Слово «пожаротушение» составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Карточки перетасовывают и вынимают по одной без возврата. Найти вероятность того, что в результате вынимания снова получится слово «экономист».

Ответ легко получается при помощи формулы классической вероятности. Число благоприятных исходов $m = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4$ находится по правилу умножения, так как буквы «п», «ж», «а», «р», «т», «у», «ш», «н», «и» можно вытащить только одним способом, а буквы «о» и «е» – двумя. Число всех исходов есть по сути перестановка тринадцати карточек, поэтому $n = 13!$, итак имеем:

$$p = \frac{4}{13!} = \frac{4}{6227020800} = \frac{1}{1556755200}$$

2. Среди 25 студентов, из которых 10 девушек, разыгрываются 3 билета, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди победителей окажутся две девушки и один юноша?

Число всех благоприятных исходов можно найти при помощи числа сочетаний и правила умножения:

$$m = C_{10}^{2} \cdot C_{15}^{1}$$

Число всех возможных исходов:

$$n = C_{25}^{3}$$

Тогда имеем:

$$p = \frac{C_{10}^{2} \cdot C_{15}^{1}}{C_{25}^{3}}$$

3. Курсант, набирая пароль от своей страницы в «Firetest», забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Число благоприятных исходов равно 1, так как существует лишь единственный способ выбрать нужную комбинацию трех цифр. А вот число всех возможных вариантов можно найти с помощью числа размещений, так как порядок расположения цифр в пароле важен, а именно:

$$n = A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

Тогда

$$p = \frac{1}{720}$$

4. Из 36 изделий 3 имеют скрытый дефект. Наугад выбрано 5 изделий. Найти вероятность, что среди выбранных изделий 2 имеют скрытый дефект.

***Решение*:**

$$p = \frac{C_{3}^{2} \cdot C_{33}^{3}}{C_{36}^{5}}$$

Здесь очень важно понимать, как получился числитель, т. е. как мы нашли число благоприятных исходов. Часто возникает путаница из-за слов в условии, что «среди выбранных изделия имеют скрытый дефект», из-за чего некоторые принимают за число благоприятных исходов C_5^2, что, безусловно, неверно.

На самом деле нужно рассуждать так: мы вытаскиваем всего 5 изделий, а вот благоприятно для нас вытащить 2 с дефектом, и так как всего нужно 5, то 3 без дефекта. Далее рассуждаем, сколькими способами можно вытащить 2 изделия с дефектом? Правильно, C_3^2 способами (т. е. 2 изделия с дефектом можно вытащить только среди изделий с дефектами, а таких всего 3). Затем, сколькими способами можно вытащить 3 изделия без дефектов? Аналогично, C_{33}^3 способами (т. е. вытаскиваем 3 изделия из 33-х имеющихся изделий без дефектов). Так как мы одновременно вытаскиваем 2 изделия с дефектами **и** 3 без таковых, то по правилу умножения из комбинаторики данные способы перемножаются и получается, что

$$m = C_3^2 \cdot C_{33}^3$$

5. Многим известна игра в покер. Для нее берут колоду из 52 карт. Каждый игрок получает по 5 карт. Различают следующие покерные комбинации.

- Флэш-ройяль: самая выигрышная комбинация в покере. Она состоит из пяти карт одной масти, от десятки до туза. Все масти равны в покере.
- Стрит-флэш: пять последовательных карт одной масти.
- Каре: четыре карты одного ранга (например, 4 короля).
- Фул-хаус: 3 равные по значению карты и 2 карты, равные по значению, отличному от значения первых 3-х карт (например, 3 девятки и 2 дамы).
- Флэш: 5 карт одной масти.
- Стрит: 5 карт последовательных значений, но различных мастей.
- Тройка: 3 карты равного значения.
- Две пары: 2 карты одного значения, 2 карты другого значения.

- Пара: 2 карты равного значения.
- Старшая карта: если комбинация в покере не попадает ни в одну из вышеупомянутых категорий, то она оценивается по разряду самой высокой карты.

Вычислить вероятность появления любой покерной комбинации совсем нетрудно: для этого необходимо лишь посчитать, в скольких случаях она возникает, и разделить полученный результат на число способов, которыми можно выбрать 5 карт из 52, т. е., по сути, воспользоваться формулой классической вероятности. Например, стрит-флэш возникает в $13 \cdot 48$ случаях, а 5 карт из 52 можно выбрать C_{52}^{5} способами, поэтому вероятность появления стрит-флэша равна p = 0,000240.

Вычислить самостоятельно с точностью до шестого знака вероятности появления оставшихся покерных комбинаций.

2.4. Задания для самостоятельной подготовки

1. Мужчина на шахматную доску случайным образом поставил две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?

2. На пункте связи пожарной части в шкафу хранится 6 планов пожаротушения на объекты хранения и переработки горючих жидкостей и газов и 10 планов пожаротушения на культурно-зрелищные предприятия. Наудачу случайным образом вынимают одновременно два плана пожаротушения. Найти вероятность того, что оба плана пожаротушения окажутся на культурно-зрелищные предприятия.

3. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

4. По условиям лотереи «Спортлото 6 из 45» участник лотереи, угадавший 4, 5, 6 видов спорта из отобранных при случайном розыгрыше 6 видов спорта из 45, получает денежный приз. Найти вероятность того, что будут угаданы: а) все 6 цифр; б) 4 цифры.

5. В партии 100 изделий, из которых 4 – бракованные. Партия произвольно разделена на две равные части, которые отправлены двум потребителям. Какова вероятность того, что все бракованные изделия достанутся: а) одному потребителю; б) обоим потребителям поровну?

6. В магазине было продано 21 из 25 холодильников трех марок, имеющихся в количествах 5, 7 и 13 штук. Полагая, что вероятность быть проданным для холодильника каждой марки одна и та же, найти вероятность того, что остались нераспроданными холодильники: а) одной марки; б) трех разных марок.

7. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

8. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

9. Из тщательно перемешанного полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость: а) оказалась дублем; б) не есть дубль.

10. В замке на общей оси пять дисков. Каждый диск разделен на шесть секторов, на которых написаны различные буквы. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение

относительно корпуса замка. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

11. В ящике 10 одинаковых деталей, помеченных номерами 1, 2, ..., 10. Наудачу извлечены шесть деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся: а) деталь № 1; б) детали № 1 и № 2.

12. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

13. В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных.

14. На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди 5-ти взятых наудачу кинескопов окажутся 3 кинескопа Львовского завода.

15. В дежурном карауле пожарной части в свободное от занятий и служебных обязанностей время двое пожарных играют в нарды. Определить вероятность выпадения грани с нечетным числом очков, считая выпадение любой грани игрального кубика одинаково вероятным.

ГЛАВА 3. ТЕОРЕМЫ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3.1. Условная вероятность события

Определение. Вероятность события B, найденная при условии, что событие A произошло, называется условной вероятностью события B и обозначается $P_A(B)$

Теорема (произведение вероятностей). Вероятность произведения двух событий равна вероятности произведения одного из них на условную вероятность второго, найденную при условии, что первое уже произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) \qquad (3.1)$$

Пример 3.1. Из колоды в 36 карт наудачу вынимают две карты. Найти вероятность того, что на второй карте будет туз при условии, что первым вынули туза.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что первой вынутой картой оказался туз, через B событие, состоящее в том, что вторым тоже оказался туз. Тогда событие AB состоит в выпадении двух тузов, вероятность этого события надо найти.

Найдем вероятность по формуле (2.3). Два туза из имеющихся в колоде четырех тузов можно вытащить $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ способами. Две карты из 36 можно вытащить $C_{36}^2 = \frac{36!}{2! \cdot 34!} = \frac{35 \cdot 36}{2} = 35 \cdot 18 = 630$ способами. Поэтому

$$P(AB) = \frac{6}{630} = \frac{1}{105}.$$

Вычислим теперь искомую вероятность по формуле (3.1). Заметим, что

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Если событие A произошло, то в колоде осталось 35 карт и среди них только 3 туза. Поэтому

$$P_A(B) = \frac{3}{35}.$$

В соответствии с формулой (3.1) будем иметь

$$P(AB)=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{35}=\frac{1}{105}.$$

Таким образом, получили, что решения, найденные по формулам (2.3) и (3.1), совпадают. ■

Формула (3.1) может быть обобщена на случай произвольного числа событий:

$$P(ABC\ldots KL)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)\cdot\ldots\cdot P_{ABC\ldots K}(L). \qquad (3.2)$$

Пример 3.2. На карточках написаны буквы М, М, А, А. Карточки наудачу раскладываются одна за другой. Найти вероятность того, что получится слово МАМА.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что получено слово МАМА, через A_1 – буква М на первом месте, A_2 – буква А на втором месте, A_3 – буква М на третьем месте, A_4 – буква А на четвертом месте.

Используя операции с событиями, получаем

$$A = A_1\, A_2\, A_3\, A_4$$

В соответствии с формулой (2.7) будем иметь

$$P(A)=P(A_1A_2A_3A_4)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot P_{A_1A_2A_3}(A_4)=$$

$$=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

Поясним вычисление, например, множителя $P_{A_1}(A_2)$. В данном случае предполагается, что событие произошло. Поэтому осталось 3 карточки с буквами М, А, А. Поэтому вероятность того, что следующей достанут карточку с буквой А, равняется 2/3. ■

Определение. События A и B называются независимыми, если вероятность наступления одного из них не зависит от того, произошло второе событие или нет, т.е.

$$P_A(B)=P(B) \text{ или } P_B(A)=P(A).$$

Определение. События A, B, …, L называются независимыми в совокупности, если независимы любые два из них и независимы любое из них и произведения остальных событий. В противном случае события зависимы.

Для независимых событий формулы (2.6), (2.7) принимают вид

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

$$P(ABC \ldots KL) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot \ldots \cdot P(L). \quad (3.3)$$

3.2. Вероятность суммы событий

В предыдущем подразделе было отмечено, что при вычислении вероятности произведения событий необходимо знать о зависимости или независимости событий. В данном подразделе покажем, что для вычисления вероятности суммы двух событий важно понимать, являются ли суммируемые события совместными.

Теорема. Вероятность суммы конечного числа *несовместных* событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$P(A + B + C + \cdots + K) = P(A) + P(B) + P(C) + \cdots + P(K). \quad (3.4)$$

Следствие 1. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице, т.е. если события A, B, …, K образуют полную группу, то

$$P(A + B + C + \cdots + K) = 1.$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (3.5)$$

Теорема. Вероятность суммы двух *совместных* событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения, т.е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (3.6)$$

В случае трех и более событий вместо обобщения формулы (2.9) рассматривают переход к противоположному событию следующим образом:

$$P(A+B+\dots+K) = 1 - P(\overline{A+B+\dots+K}) = 1 - P(\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\ldots\cdot\bar{K}). \quad (3.7)$$

Если при этом события $A, B, \ldots, K$ независимы, то

$$P(A+B+\dots+K) = 1 - P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})\cdot\ldots\cdot P(\bar{K}). \quad (3.8)$$

Пример 3.3. Три стрелка независимо друг от друга производят по выстрелу в мишень. Вероятности попадания равны 0,6, 0,7, 0,8. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один стрелок.

Решение. Пусть событие A_i – попадание i-го стрелка. По условию задачи $P(A_1) = 0{,}6$; $P(A_2) = 0{,}7$; $P(A_3) = 0{,}8$.

С учетом наших обозначений требуется определить вероятность суммы $A_1 + A_2 + A_3$. . События A_i совместны и независимы, поэтому в соответствии с формулой (3.8) имеем

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3) =$$
$$= 1 - 0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8 = 0{,}664. \blacksquare$$

Заметим, что если в данном примере формально воспользоваться формулой (3.4), то получим

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}6 + 0{,}7 + 0{,}8 = 2{,}1,$$

что не является правильным, так как значение вероятности всегда должно находиться в диапазоне от 0 до 1. Это связано с тем, что при решении примера 3.3 необходимо учитывать совместность событий, поэтому пользоваться формулой (3.4) нельзя. ■

Пример 3.4. На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. Какова вероятность выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено: а) 2 билета; б) 4 билета?

Решение. Пусть событие A_i – выигрыш по i-му билету, i = 1, 2, 3, 4.

а) Вероятность выигрыша по двум билетам вычислим по формуле (3.6), так как в данном случае события у нас зависимые и совместные:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P\big(A_1\big) \cdot P_{A_1}(A_2\big) = \frac{5}{100} + \frac{5}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} = 0{,}098.$$

б) Вероятность выигрыша хотя бы по одному из четырех билетов будем искать по формуле (3.7):

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 1 - P(\overline{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}) =$$

$$= 1 - \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \approx 0{,}188. \blacksquare$$

3.3. Формулы полной вероятности и Байеса.

Пусть проводится опыт, при этом некоторое событие может произойти только при условии одного из n исключающих друг друга предположений (гипотез), образующих полную группу событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$:

$$H_i H_j = \emptyset, \text{если } i \neq j, \sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$$

Тогда в соответствии с формулой полной вероятности вероятность события A равна сумме произведений каждого из событий H_i на условные вероятности события A, т.е.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) \qquad (3.9)$$

Пример 3.5. Имеются три одинаковые урны с шарами. В первой из них 3 белых и 4 черных шара, во второй – 2 белых и 5 черных, в третьей – 10 черных шаров. Из случайно выбранной урны наудачу вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение. Обозначим через H_i, где $i = 1, 2, 3$, выбор урны с соответствующим номером. По условию задачи все гипотезы равновозможны, поэтому $P(H_i) = 1/3$.

Через A обозначим событие, состоящее в том, что вынули белый шар.

Найдем условные вероятности события A:

$$P_{H_1}(A) = \frac{3}{7}, P_{H_2}(A) = \frac{2}{7}, P_{H_3}(A) = 0$$

Тогда в соответствии с (3.7) будем иметь:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{5}{21}$$

Пусть теперь известен результат опыта, т.е. известно, что событие A произошло. Этот факт может изменить известные до опыта вероятности гипотез. Например, в примере 3.5 извлечение из урны белого шара говорит о том, что этой урной не могла быть третья, в которой нет белых шаров, то есть $P_{H_3}(A) = 0$. Для переоценки вероятностей гипотез при известном результате опыта используется формула Байеса:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, \tag{3.8}$$

Пример 3.6. На трех станках-автоматах обрабатываются однотипные детали, поступающие после обработки на общий конвейер. Первый станок дает 2 % брака, второй – 7 %, третий – 10 %. Производительность первого станка в 3 раза больше производительности второго, а третьего – в 2 раза меньше, чем второго.

а) Каков процент брака на конвейере?

б) Каковы доли деталей каждого станка среди бракованных деталей на конвейере?

Решение. Рассмотрим событие A – случайно взятая с конвейера деталь бракованная. Пусть H_i – взятая наудачу деталь обработана на i-ом станке.

Условные вероятности (в условии задачи они даны в форме процентов):

$$P_{H_1}(A) = 0{,}02;\ P_{H_2}(A) = 0{,}07;\ P_{H_3}(A) = 0{,}01$$

Зависимости между производительностями станков запишем так:

$$P(H_1) = 3P(H_2), \qquad P(H_3) = 0{,}5P(H_2)$$

Гипотезы образуют полную группу, поэтому

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$$

Откуда находим, что

$$P(H_1) = \frac{6}{9}, \qquad P(H_2) = \frac{2}{9}, \quad P(H_3) = \frac{1}{9}$$

а) В соответствии с формулой (3.9) вероятность того, что взятая наудачу с конвейера деталь бракованная, определяется так:

$$P(A) = \frac{6}{9} \cdot 0{,}02 + \frac{2}{9} \cdot 0{,}07 + \frac{1}{9} \cdot 0{,}1 = 0{,}04$$

Таким образом, доля брака составляет 4 %.

б) Пусть известно, что взятая наудачу деталь – бракованная. Пользуясь формулой Байеса (3.8), найдем условные вероятности гипотез:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{6 \cdot 0{,}02}{9 \cdot 0{,}04} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$$

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{2 \cdot 0{,}07}{9 \cdot 0{,}04} = \frac{7}{18} \approx 0{,}39$$

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}{P(A)} = \frac{1 \cdot 0{,}1}{9 \cdot 0{,}04} = \frac{5}{18} \approx 0{,}28$$

Таким образом, в общей массе бракованных деталей на конвейере доля первого станка составляет 33 %, второго – 39 %, третьего – 28 %.■

3.4. Формула Бернулли

Проводится серия из независимых испытаний при одном и том же комплексе условий, в каждом испытании некоторое событие A может произойти с вероятностью p. Тогда вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A

произойдет ровно m раз в n испытаниях, вычисляется по следующей формуле Бернулли:

$$P_{m,n} = C_n^m \cdot p^n \cdot q^{n-m} \tag{3.9}$$

Здесь $q = 1 - p$ – вероятность того, что событие A не произойдет.

Определение. Число m_0 наступления события A в n независимых испытаниях называется наивероятнейшим, если вероятность $P_{m_0,n}$ по крайней мере не меньше вероятностей $P_{m,n}$ при любом m.

Значение m_0 находят из следующей системы неравенств:

$$P_{m_0,n} \geq P_{m_0+1,n},$$

$$P_{m_0,n} \geq P_{m_0-1,n}.$$

Подставляя в последнее неравенство соотношения (3.9) и учитывая формулу для вычисления числа сочетаний, можно найти, что

$$np - q \leq m_0 \leq np + p \tag{3.10}$$

Заметим, что длина интервала равна $(np + p) - (np - q) = p + q = 1$, поэтому всегда существует целое число m_0, удовлетворяющее условию (3.10). При этом если $np + p$ является целым числом, то наивероятнейших числа два: $m_0 = np + p$ и $m_0 = np - q$.

Пример 3.7. Играется матч между шахматистами X и Y. Вероятность того, что шахматист X выиграет каждую отдельную партию, равна 2/3, вероятность выигрыша партии шахматистом Y равна 1/3. Предполагается, что ничьих партий не бывает, т.е. если они происходят, то не учитываются. Матч состоит из 6 партий. Требуется определить:

1) вероятность выигрыша матча шахматистом X;

2) вероятность ничейного исхода;

3) вероятность выигрыша шахматистом Y;

4) наивероятнейшее число выигрышей шахматиста X.

Решение. Всего проводится 6 партий, значит n = 6. Вероятность выигрыша шахматистом X равна 2/3, значит p = 2/3. Соответственно вероятность проигрыша шахматистом X равна q = 1/3. Пусть A_i, где $i = 0, \ldots, 6$ – событие, состоящее в том, что X выиграл i партий из 6-ти.

1) Вероятность выигрыша матча шахматистом X с учетом независимости испытаний A_i равна $P(A_4 + A_5 + A_6) = P(A_4) + P(A_5) + P(A_6)$, что означает выигрыш в не менее чем 4-х партиях.

Далее по формуле (3.9) последовательно находим, что

$$P(A_4) = P_{4,6} = C_6^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{6-4} = \frac{240}{729}$$

$$P(A_5) = P_{5,6} = C_6^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{6-5} = \frac{192}{729}$$

$$P(A_6) = P_{6,6} = C_6^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{6-6} = \frac{64}{729}$$

Таким образом, вероятность того, что X выиграет матч, равна

$$P(A_4 + A_5 + A_6) = \frac{240 + 192 + 64}{729} = \frac{496}{729} \approx 0{,}68$$

2) Ничья происходит при счете «3–3», т.е.

$$P(A_3) = P_{3,6} = C_6^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{6-3} = \frac{120}{729} \approx 0{,}22$$

3) Вероятность выигрыша матча Y равна

$$P(A_0 + A_1 + A_2) = 1 - P(A_3 + A_4 + A_5 + A_6) \approx 1 - 0{,}68 - 0{,}22 = 0{,}1$$

4) Из неравенства (3.10) последовательно находим

$$6 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \le m_0 \le 6 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3}, \qquad 1 \le m_0 \le 2$$

3.5. Задания для самостоятельной подготовки

1. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы: а) только второй экзамен; б) только один экзамен; в) три экзамена; г) по крайней мере два экзамена; д) хотя бы один экзамен.

2. Причиной разрыва электрической цепи служит выход из строя элемента K_1 или одновременный выход из строя двух элементов – K_2 и K_3. Элементы могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями, равными соответственно 0,1; 0,2; 0,3. Какова вероятность разрыва электрической цепи?

3. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что: а) двигатель начнет работать при третьем включении зажигания; б) для запуска двигателя придется включать зажигание не более трех раз.

4. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое 33 отделение равна 0,95, во второе отделение – 0,9 и в третье – 0,8. Найти вероятность следующих событий: а) только одно отделение получит газеты вовремя; б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

5. Мастер обслуживает 4 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены потребует внимания рабочего, равна 0,3, второй – 0,6, третий – 0,4 и четвертый – 0,25. Найти вероятность того, что в течение смены хотя бы один станок не потребует внимания мастера.

6. В коробке смешаны электролампы одинакового размера и формы: по 100 Вт – 7 штук, по 75 Вт – 13 штук. Вынуты наудачу 3 лампы. Какова вероятность того, что: а) они одинаковой мощности; б) хотя бы две из них по 100 Вт?

7. В коробке 10 красных, 3 синих и 7 желтых карандашей. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что они все: а) разных цветов; б) одного цвета?

8. Брак в продукции завода вследствие дефекта А составляет 4 %, а вследствие дефекта В – 3,5 %. Годная продукция завода составляет 95 %. Найти вероятность того, что: а) среди продукции, не обладающей дефектом А,

встретится дефект В; б) среди забракованной по признаку А продукции встретится дефект В.

9. Среди 20 поступающих в ремонт часов 8 нуждаются в общей чистке механизма. Какова вероятность того, что среди взятых одновременно наудачу трех часов по крайней мере двое нуждаются в общей чистке механизма?

10. Контролер ОТК, проверив качество сшитых 20 пальто, установил, что 16 из них первого сорта, а остальные – второго. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу из этой партии трех пальто одно будет второго сорта.

11. Среди студентов, собравшихся на семинар по теории вероятностей, выбирают наудачу одного. Пусть событие А заключается в том, что он – юноша. Событие В в том, что он не курит, а событие С в том, что он живет в общежитии. 1) Описать событие АВС; 2) При каком условии будет иметь место тождество АВС = А? 34 3) Когда будет справедливо соотношение С $\subseteq$ В? 4) Когда будет верно равенство А = В? Будет ли оно иметь место, если все юноши курят?

12. Пусть А, В, С – три произвольно выбранных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из А, В, С: а) произошло только А; б) произошли А и В, но С не произошло; в) все три события произошли; г) произошло хотя бы одно из этих событий; д) произошло хотя бы два события; е) произошло одно и только одно из этих событий; ж) произошло два и только два события; з) ни одно из событий не произошло; и) произошло не более двух событий.

13. Вероятность выхода изделия из строя при эксплуатации сроком до одного года равна 0,13, а при эксплуатации сроком до 3-х лет – 0,36. Найти вероятность выхода изделия из строя при эксплуатации сроком от 1 года до 3-х лет.

14. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что: а) хотя бы один из взятых учебников

окажется в переплете (событие А); б) хотя бы два из взятых учебников окажутся в переплете.

15. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

16. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

17. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

18. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0,8. Сколько выстрелов должен произвести стре- 35 лок, чтобы с вероятностью, меньшей 0,4, можно было ожидать, что не будет ни одного промаха?

19. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 – для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

20. Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Используя понятие условной вероятности, найти вероятность того, что студент знает все эти вопросы.

21. Разыскивая специальную книгу, студент решил обойти три библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно, есть в ее фондах книга или нет. И если книга есть, то одинаково вероятно, занята она другим читателем или нет. Что более вероятно – достанет студент книгу или нет, если известно, что библиотеки комплектуются независимо одна от другой?

22. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

23. В ящике 10 деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

24. В урне имеется пять шаров с номерами от 1 до 5. Наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятности следующих событий: а) последовательно появятся шары с номерами 1, 4, 5; б) извлеченные шары будут иметь номера 1, 4, 5 независимо от того, в какой последовательности они появились.

25. В большой рекламной фирме 21 % работников получают высокую заработную плату. Известно также, что 40 % работников фирмы – женщины, а 6,4 % работников – женщины, получающие высокую заработную плату. Можем ли мы утверждать, что на фирме существует дискриминация женщин в оплате труда?

26. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по телевидению, равна 0,04. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того же продукта на рекламном стенде, равна 0,06. Предполагается, что оба события – независимы. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит обе рекламы?

27. Консультационная фирма претендует на два заказа от двух крупных корпораций. Эксперты фирмы считают, что вероятность получения консультационной работы в корпорации A (событие A) равна 0,45. По предположению экспертов, если фирма получит заказ у корпорации A, то вероятность того, что и корпорация B обратится к ним, равна 0,9. Какова вероятность получения консультационной фирмой обоих заказов?

28. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Оба они делают по одному выстрелу по мишени, а затем каждый из стрелков стреляет еще раз, если при первом сделанном им выстреле он промахнулся. Найти вероятность того, что в мишени ровно 2 пробоины.

29. Пакеты акций, имеющихся на рынке ценных бумаг, могут дать доход владельцу с вероятностью 0,5 (для каждого пакета). Сколько пакетов акций различных фирм нужно приобрести, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,96875, можно было ожидать доход хотя бы по одному пакету акций?

30. В среднем 20 % пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене: 1) не будут проданы 5 пакетов; 2) будет продано: а) менее 2 пакетов; б) не более 2; в) хотя бы 2 пакета.

31. Вероятность малому предприятию быть банкротом за время t равна 0,2. Найти вероятность того, что из шести малых предприятий за время t сохранятся: а) два; б) более двух.

32. В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектны. Найти вероятность того, что среди десяти автомобилей имеют некомплектность: а) три автомобиля; б) менее трех.

33. Производится залп из шести орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект из каждого орудия равна 0,6. Найти вероятность ликвидации объекта, если для этого необходимо не менее четырех попаданий.

34. В среднем по 15 % договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из десяти договоров с наступлением страхового случая будет связано с выплатой страховой суммы: а) три договора; б) менее двух договоров.

35. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

36. Известно, что в среднем 95 % выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной продукцию с вероятностью 0,98, если она стандартна, и с вероятностью 0,06, если она нестандартна. Определить вероятность того, что: 1) взятое наудачу изделие

пройдет упрощенный контроль; 2) изделие стандартное, если оно: а) прошло упрощенный контроль; б) дважды прошло упрощенный контроль.

37. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Какова вероятность того, что она принадлежит: а) первому стрелку; б) второму стрелку?

ГЛАВА 4. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

4.1. Понятие случайной величины

Определение. Случайной величиной называется функция, определенная на множестве элементарных значений и принимающая в зависимости от случая одно из возможных своих значений.

Выделяют непрерывные и дискретные случайные величины. В случае дискретных случайных величин множество значений конечно или бесконечно, но счетно. Пример такой величины – количество детей в семье или стрельба до первого попадания. Множеством значений непрерывной величины является интервал на числовой оси, пример – дальность полета снаряда.

Случайные величины будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита X, Y и т.д.

П р и м е р ы

1. X – оценка на экзамене 2, 3, 4, 5.
2. X – число очков при бросании кубика 1, 2, 3, 4, 5, 6.
3. X – число мальчиков из 100 детей, $0 \leq x \leq \infty$.
4. X – $t°$ (–273; +∞).
5. X – курс доллара (0; +∞).
6. X – зарплата (0; +∞).

Определение. Дискретная случайная величина – это случайная величина, которая принимает набор отдельных изолированных значений (конечное (счетное) или бесконечное число).

Определение. Непрерывная случайная величина – это случайная величина, набор значений которой целиком заполняет некоторый интервал.

Пусть в результате испытания дискретная случайная величина X может принять одно из следующих значений: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$;

p_i – вероятность того, что случайная величина примет значение x_i:

$$p_i = p(x = x_i),\ \sum p_i = 1.$$

Определение. Законом распределения случайной величины называется соответствие между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями.

Закон распределения можно задавать в виде таблицы, аналитически или графически.

Рассмотрим табличный способ задания дискретной случайной величины. Для этого возможные значения и соответствующие вероятности записываются так:

X:

x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Здесь $p_i = P\ (X = x_i)$ – читать следует «Вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i, равна p_i». В законе распределения перечислены все возможные значения, поэтому $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$.

Приведем несколько основных дискретных случайных величин.

1. Закон распределения случайной величины – оценка на экзамене.

X	2	3	4	5
p	0,2	0,4	0,3	0,1

2. Распределение Бернулли.

X	0	1
p	q	p

где $q = 1 – p$.

Случайная величина имеет распределение Бернулли, если она принимает всего два значения: 0 и 1 с вероятностями p и $q = 1 – p$. Таким образом, $P(x = 1) = p$; $P(x = 0) = q$.

Принято говорить, что событие $\{X = 1\}$ соответствует «успеху», а событие $\{X = 0\}$ – «неудаче».

3. Распределение случайной величины, вероятности каждого значения которой одинаковы.

X – число очков при бросании кости.

X	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Для n-величины $P(x = k) = \frac{1}{n}$, $k = \overline{1,n}$.

X	1	2	3	4	…	n
p	$1/n$	$1/n$	$1/n$	$1/n$	…	$1/n$

4. Геометрическое распределение.

Пусть вероятность попадания в одном выстреле равна 0,7 и она одинакова. Стреляют до первого попадания в цель. Составить закон распределения числа выстрелов.

X	1	2	3	4	…	k
p	0,7	0,21	0,063	0,00189	…	$0{,}3^{k-1} \cdot 0{,}7$

$$P(X = 1) = 0{,}7;$$

$$P(X = 2) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21;$$

$$P(X = 3) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}063;$$

$$P(X = 4) = 0{,}3^3 \cdot 0{,}7 = 0{,}00189;$$

$$P(X = k) = 0{,}3^{k-1} \cdot 0{,}7;$$

$$\sum P_k = \frac{0{,}7}{1-0{,}3} = 1 .$$

что и требовалось доказать (геометрическая прогрессия).

5. Пусть имеется N объектов, из них M обладает нужным свойством ($M < N$). Извлекаем n объектов. Тогда говорят, что k – число объектов из n объектов, обладающих нужным свойством, имеет гипергеометрическое распределение со следующим законом распределения:

$$P(x=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

6. Пусть вероятность попадания в мишень первого стрелка – 0,7, второго – 0,8, третьего – 0,9. Эти вероятности независимы. Стреляют 1 раз. Составить закон распределения числа попаданий в цель.

X	0	1	2	3
p	0,006	0,092	0,398	0,504

$$P(X=0)=0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}006;$$

$$P(X=1)=0{,}7\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1+0{,}3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9=0{,}092;$$

$$P(X=2)=0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}7\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}398;$$

$$P(X=3)=0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}504.$$

7. Биноминальное распределение.

Пусть вероятность попадания в 1 выстреле 0,7. Стреляют 4 раза. Составить закон распределения числа попадания в цель.

X	0	1	2	3	4
p	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

$$P(X=0)=0{,}3^4=0{,}0081;$$

$$P(X=4)=0{,}7^4=0{,}2401;$$

$$P(X=1)=C_4^1\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3^3=0{,}0756$$

$$P(X=2)=C_4^2\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}3^2=0{,}2646$$

$$P(X=3)=C_4^3\cdot 0{,}7^3\cdot 0{,}3^1=0{,}4116$$

Формула Бернулли: $P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$, где $q=1-p$.

Пусть проводится n независимых испытаний. Вероятность успеха появления событий A в каждом испытании постоянна и равна p. Тогда говорят, что случайная величина X – число появления события A в n испытаниях имеет биноминальное распределение со следующим законом распределения:

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k},$$

где $k = \overline{0, n}$.

$$X \sim B_i\,(p);$$

$$X \sim B_i\,(n, p);$$

$$\sum P_k = \sum C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = 1.$$

$$q^n + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \cdots + p^n = (p+q)^n = 1$$

(формула бинома Ньютона).

8. Распределение Пуассона.

$$X \sim \text{Poisson}\ (\lambda).$$

$$p(x = \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k = \overline{0, +\infty},\ \ \lambda > 0,\ \sum p_k = 1.$$

4.2. Математические операции над случайными величинами

Определение. Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие значения принимает другая величина.

Например, если имеются билеты двух различных лотерей, то случайные величины, выражающие выигрыш по каждому билету в денежных единицах, будут независимыми. Если же эти величины выражают выигрыш по одной лотерее, то они будут зависимыми.

Для определения математических операций рассмотрим наряду с дискретной случайной величиной X, определенной в подразделе 4.1, независимую от X дискретную случайную величину Y:

Y:

y_1	y_2	…	y_j	…	y_m
p_1	p_2	…	p_j	…	p_m

Определение. Произведением kX случайной величины X на постоянную величину k называется случайная величина, которая принимает значения kx_i с теми же вероятностями p_i, где $i = 1, \ldots, n$.

Определение. l-й степенью случайной величины X называется случайная величина, которая принимает значения x_i^l с теми же вероятностями p_i, где $i = 1 \ldots n$.

Определение. Суммой (разностью или произведением) случайных величин X и Y называется случайная величина, которая принимает значения вида $x_i + y_j$ ($x_i - y_j$ или $x_i * y_j$), где $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ с вероятностями

$$p_{ij} = P((X = x_i)(Y = y_j)).$$

Замечание. В случае получения одинаковых значений соответствующие вероятности необходимо складывать, а значение случайной величины записывать только один раз.

Пример 4.1. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

X:

x_i	-1	0	1
p_i	0.2	0.4	0.4

Y:

y_j	1	2	3
p_j	0.3	0.3	0.4

Найти закон распределения случайных величин:

а) $V = X^2$; б) $U = XY$; в) $Z = X - Y$.

Решение. а) значениями случайной величины V будут $(-1)^2 = 1$, $0^2 = 0$, $1^2 = 1$ с теми же вероятностями 0,2, 0,4, 0,4. Складывая вероятности для значения 1, окончательно получаем следующее распределение

V:

v_k	0	1
p_k	0.4	0.6

б) выпишем попарные произведения значений случайных величин X и Y и соответствующих вероятностей:

$-1 \cdot 1 = -1 \to 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$;

$-1 \cdot 2 = -2 \to 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$;

$-1 \cdot 3 = -3 \to 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$;

$0 \cdot 1 = 0 \to 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$;

$0 \cdot 2 = 0 \to 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$

$0 \cdot 3 = 0 \to 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$

$1 \cdot 1 = 1 \to 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$

$1 \cdot 2 = 2 \to 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$

$1 \cdot 3 = 3 \to 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$

Складывая теперь вероятности при одинаковых значениях, получаем следующее распределение случайной величины U:

U:

u_k	-3	-2	-1	0	1	2	3
p_k	0.08	0.06	0.06	0.4	0.12	0.12	0.16

в) распределение $Z = X - Y$ получается аналогично предыдущему пункту:

Z:

z_k	-4	-3	-2	-1	0
p_k	0,08	0,22	0,34	0,24	0,12

4.3. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений возможных значений на соответствующие вероятности, т.е.

$$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i \qquad (4.1)$$

Определение. Дисперсией называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, т.е.

$$D(x) = M(X - M(X))^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2 p_i \tag{4.2}$$

Определение. Средним квадратичным отклонением σ_{x} случайной величины X называется значение арифметического корня квадратного из ее дисперсии:

$$\sigma_{\text{x}}=\sqrt{D(\text{X})}. \tag{4.3}$$

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной равно постоянной:

$$M(C) = C.$$

2. Константу можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(kX) = kM(X).$$

3. Математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно такой же сумме их математических ожиданий, т. е

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

4. Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

2. Константу можно выносить за знак дисперсии, возводя ее в квадрат:

$$D(kX) = k^2 D(X).$$

3. Дисперсия алгебраической суммы конечного числа случайных величин равна сумме их дисперсий, т. е

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

4. Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) – M^2(X).$$

Пример 4.2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X примера 4.1.

Решение. В соответствии с формулами (4.1) – (4.3) имеем

$$M(X) = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}2.$$

$$D(X) = (-1-0{,}2)^2 + (0-0{,}2)^2 + (1-0{,}2)^2 = 0{,}56.$$

$$\sigma_{\text{x}} = \sqrt{0{,}56} \approx 0{,}75.$$

4.4. Функция распределения случайной величины

Определение. Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяемая соотношением

$$F(x) = P(X < x). \tag{4.4}$$

Пример 4.3. Найти функцию распределения для случайной величины X, определенной в примере 4.1.

Решение. Рассмотрим различные значения x.

1) Если $x \le -1$, то $F(x) = 0$.

2) Если $-1 \le x \le 0$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = -1) = 0{,}2$.

3) Если $0 \le x \le 1$, то $F(x) = P(\text{X} = -1) + P(X = 0) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$.

4) Если $x > 1$, то $F(x) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = 1$.

Окончательно получаем следующее выражение для $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 0{,}2, & -1 \le x \le 0 \\ 0{,}6, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

График этой функции показан на рисунке 5.

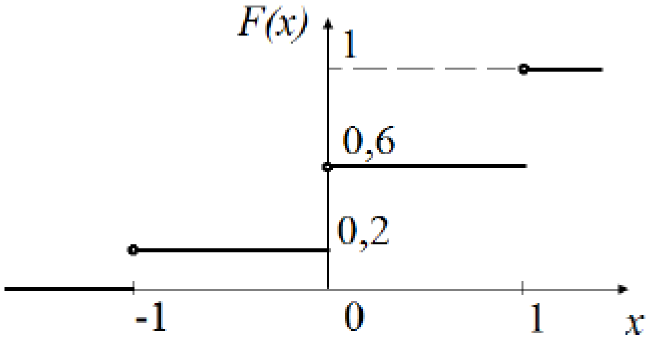


Рис. 5. График функции распределения

Рассмотрим свойства функции распределения.

1. Функция распределения принимает значения между 0 и 1:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

2 Функция распределения – неубывающая функция.

3. На минус бесконечности функция распределения равна 0, на плюс бесконечности равна 1, т.е.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \lim_{x\to-\infty} F(x) = 1.$$

4. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_{1,} x_2)$ равна приращению функции распределения на этом интервале, т.е.

$$P(x_1 \leq X < x_2\,) = F(x_2) - F(x_1). \qquad (4.5)$$

4.5. Непрерывные случайные величины

Определение. Случайная величина X называется непрерывной, если функция распределения непрерывна во всех точках и дифференцируема всюду, кроме возможных отдельных точек.

Теорема. Для непрерывных случайных величин вероятность попадания случайной величины в интервал $(x_{1,} x_2)$ не зависит от того, является этот интервал закрытым или открытым.

Определение. Плотностью вероятности $\varphi(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения, т.е.

$$\varphi(x) = F'(x). \qquad (4.6)$$

Отметим основные свойства функции $\varphi(x)$.

1. Плотность вероятности – неотрицательная функция т.е.

$$\varphi(x) \geq 0.$$

2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал [a, b] определяется по формуле

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x)dx. \tag{4.7}$$

3. Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности непрерывной случайной величины равен 1, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1. \tag{4.8}$$

Определение. Математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется следующей формулой:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx. \tag{4.9}$$

Определение. Дисперсия может быть вычислена так:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M\,(X))^2\varphi(x)dx. \tag{4.10}$$

Пример 4.4 Случайная величина задана функцией распределения

$$F(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ kx^4, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Требуется а) определить параметр k; б) вычислить математическое ожидание и дисперсию; в) найти вероятность попадания случайной величины в интервал (0,1), показать данную вероятность на графиках функции распределения и плотности вероятности.

Решение. а) Вычислим плотность вероятности по формуле (4.6):

$$\varphi(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 4kx^3, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Используя соотношение (4.8), будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = \int_0^2 4kx^3\,dx = k2^4 = 1,$$

откуда находим, что k = 1/16.

Таким образом, плотность вероятности определяется так

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ {}^1\!/_4\, x^3, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2, \end{cases}$$

а функция распределения определяется следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ {}^1\!/_{16}\, x^4, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

б) По формулам (4.9), (4.10) находим

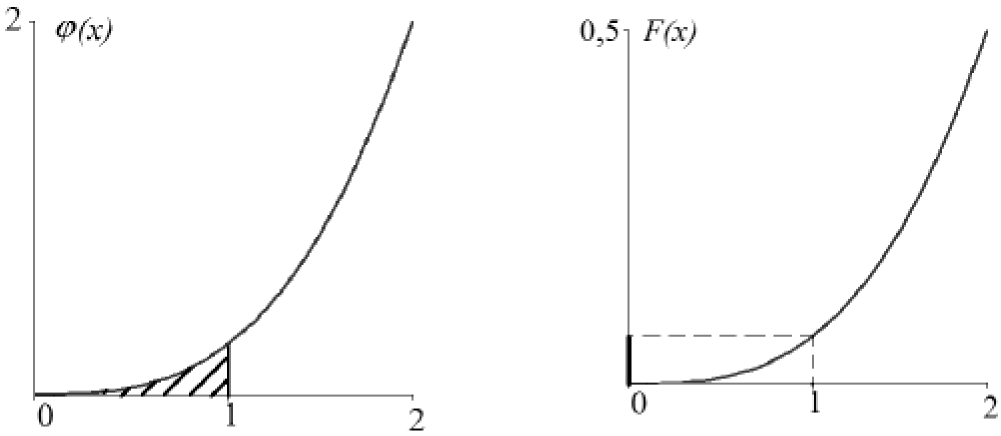
$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{4}x^4 dx = \frac{8}{5},$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \int_0^2 \frac{1}{4}x^5 dx - \frac{8^2}{5^2} = \frac{8}{3} - \frac{64}{25} = \frac{8}{75}$$

в) Используя формулу (4.7), будем иметь

$$P(0 \le X \le 1) = \int_0^1 \varphi(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{4}x^3 dx = \frac{1}{16}$$

Построим графики функций распределения (рис. 6 а) и плотности вероятности (рис. 6 б).



а б

Рис. 6. а. График функции распределения; б. График плотности вероятности

Искомая вероятность на графике плотности вероятности представляет собой площадь заштрихованной фигуры, а на графике функции распределения - длину отрезка по оси ординат.

4.6. Основные законы распределения

1. Биноминальное распределение

Определение. Дискретная случайная величина X имеет биноминальный закон распределения с параметрами n, p, если она принимает значения 0, 1, 2, …, m, …, n с вероятностями

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{4.11}$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Теорема. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по биноминальному закону, находятся так:

$$M(X) = np,\ D(X) = npq. \tag{4.12}$$

Пример 4.5. Считая, что вероятности рождения мальчиков и девочек одинаковы, составить закон распределения числа мальчиков в семье с двумя детьми.

Решение. В данном случае число мальчиков распределено по биноминальному закону с параметрами $n = 2$, $p = 0{,}5$. Возможное количество мальчиков – 0, 1, 2. Соответствующие вероятности находим следующим образом:

$$P(X = 0) = C_2^0 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^0 = \frac{1}{4},$$

$$P(X = 1) = C_2^1 \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^1 = \frac{1}{2},$$

$$P(X = 2) = C_2^2 \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^2 = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, закон распределения имеет вид

X:

x_i	0	1	2
p_i	0,25	0,5	0,25

2. Закон распределения Пуассона

Определение. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если она принимает значения 0, 1, 2, …, m, … с вероятностями

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda) \tag{4.13}$$

Теорема. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, равны λ, т.е.

$$M(X) = \lambda,\ D(X) = \lambda \tag{4.14}$$

3. Равномерный закон распределения

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет равномерный закон распределения на отрезке $[a,\ b]$, если ее плотность вероятности определяется соотношением

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \tag{4.15}$$

Теорема. Функция распределения случайной величины, распределенной по равномерному закону, имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b] \\ 1, & x > b \end{cases} \tag{4.16}$$

Теорема. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по равномерному закону, определяются так:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{4.17}$$

4. Показательный закон распределения

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет показательный (экспоненциальный) закон распределения с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность вероятности определяется соотношением

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad (4.18)$$

Теорема. Функция распределения случайной величины, распределенной по показательному закону, имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \qquad (4.19)$$

Теорема. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по показательному закону, определяются так:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2} \qquad (4.20)$$

5. Нормальный закон распределения

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет нормальный закон распределения (закон Гаусса) с параметрами a и σ^2, если ее плотность вероятности определяется соотношением

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (4.21)$$

Характерный график плотности вероятности $\varphi(x)$ приведен на рис. 7.

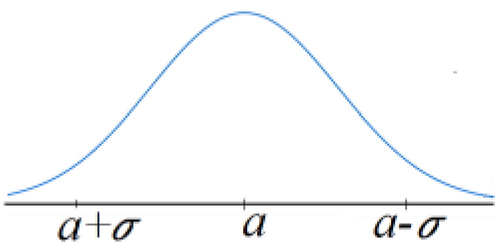


Рис. 7. График плотности вероятности $\varphi(x)$

Теорема. Функция распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону, имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \qquad (4.22)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласса.

Теорема. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по нормальному закону, определяются так:

$$M(X) = a, D(X) = \sigma^2 \qquad (4.23)$$

Свойства случайной величины X, распределенной по нормальному закону:

1. Вероятность попадания случайной величины X в интервал $[x_1, x_2]$ равна

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \frac{1}{2}[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)] \qquad (4.24)$$

где
$$t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma}, t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma}$$

2. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от математического ожидания a не превосходит величину $\Delta > 0$ по абсолютной величине, равна

$$P(|X - a| \le \Delta) = \Phi(t) \qquad (4.25)$$

где $t = {}^{\Delta}/_{\sigma}$.

3. **«Правило трех сигм»**. Практически достоверно, что значения нормально распределенной случайной величины заключены в интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$.

Пример 4.6. Случайная величина распределена нормально с параметрами a = 8, σ = 3. Найти вероятность того, что случайная величина в результате опыта примет значение, заключенное в интервале (12,5; 14).

Решение.

$$P(12{,}5 \le X \le 14) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{14-8}{3}\right) - \Phi\left(\frac{12{,}5-8}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}[\Phi(2) - \Phi(1{,}6)] \approx 0{,}044$$

4.7. Задания для самостоятельной подготовки

1. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

2. Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна 0,2. Составить закон распределения числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных.

3. В партии из 10 огнетушителей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны два огнетушителя. Составить закон распределения числа стандартных огнетушителей среди отобранных.

4. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0,9. Требуется: а) составить закон распределения случайной дискретной величины X – числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту; б) найти наивероятнейшее число m_0 заданных студенту дополнительных вопросов.

5. Экзаменатор задает студенту вопросы, пока тот правильно отвечает. Как только число правильных ответов достигнет четырех либо студент ответит неправильно, экзаменатор прекращает задавать вопросы. Вероятность правильного ответа на один вопрос равна 2/3. Составить закон распределения числа заданных студенту вопросов.

6. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8 и уменьшается с каждым выстрелом на 0,1. Составить закон распределения числа попаданий в цель, если сделано 3 выстрела. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

7. Законы распределения двух случайных величин заданы следующим образом:

x_i	–1	0	2

X:

p_i	0,2	0,4	0,4

Y:

y_j	–2	0	1
p_j	0,3	0,6	0,1

а) найти распределение случайной величины $X \cdot Y$;

б) показать, что $X + X \neq 2 \cdot X$, но $M(X + X) = M(2 \cdot X)$

8. Пусть X, Y, Z – случайные величины: X – выручка фирмы, Y – ее затраты, $Z = (X - Y)$ – прибыль. Найти распределение прибыли Z, если затраты и выручка независимы и заданы распределениями:

X:

x_i	3	4	5
p_i	1/3	1/3	1/3

Y:

y_j	1	2
p_j	1/2	1/2

9. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления событий A в каждом испытании равна 0,2.

10. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $M(X) = 1{,}2$.

11. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2x$ в интервале $(0, 1)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X.

12. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = x/2$ в интервале (0; 2); вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X.

13. Найти математическое ожидание случайной величины X, заданной функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x}{4}, & 0 < x \le 4, \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

14. Случайная величина X в интервале (0, 5) задана плотностью распределения $f(x) = 2/25 \cdot x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию X.

15. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}, & -2 < x \le 2, \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

16. Вероятность выигрыша в лотерее равна 0,1. Составить закон распределения числа выигравших билетов среди 10 приобретенных. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

17. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента равна 0,002. Необходимо: а) составить закон распределения отказавших элементов; б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины; в) определить вероятность того, что откажет хотя бы один элемент.

18. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15, 25).

19. Случайная величина Z подчиняется стандартному нормальному закону распределения. Найти вероятность попадания Z в интервалы: а) от 2 до 3; б) менее 2,1.

20. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. 1. Найти вероятность того, что цена акции: а) не выше 15,3 ден. ед.; б) не ниже 15,4 ден. ед.; в) от 14,9 до 15,3 ден. ед. 2. С помощью правила трех сигм найти границы, в которых будет находиться текущая цена акции.

ГЛАВА 5. ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В данной главе собраны занимательные задачи и парадоксы, которые могут сделать проведение занятий по теории вероятностей более привлекательными.

5.1. Занимательные задачи

Пример 5.1. Легкомысленный член жюри. В жюри из трех человек два члена независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p, а третий для внесения решения бросает монету (окончательное решение выносится большинством голосов). Жюри из одного человека выносит правильное решение с вероятностью p. Какое из этих жюри выносит правильное решение?

Решение. В данном случае возможны три случая. В первом случае пусть два серьёзных члена жюри будут голосовать за справедливое решение с вероятностью $p \cdot p$, тогда результат голосования третьего члена жюри уже не важен.

Если судью будут расходиться во мнениях, вероятность чего равна

$$p \cdot (1 - p) + (1 - p) \cdot p = 2p \cdot (1 - p),$$

то для нахождения вероятности правильного решения, это число надо умножить на 1/2.

Таким образом, вероятность вынесения справедливого решения жюри из трёх человек, равна $p \cdot p + p \cdot (1 - p) = p$, что совпадает с соответствующей вероятностью для жюри из одного человека.

Поэтому, как это ни парадоксально, получаем, что **оба типа жюри имеют одинаковую вероятность вынести правильное решение.**

Пример 5.2. Нетерпеливые дуэлянты. Дуэли в городе Осторожности редко кончаются печальным исходом. Дело в том, что каждый дуэлянт прибывает на место встречи в случайный момент времени между 5 и 6 часами утра и, прождав соперника 5 минут. Удаляется. В случае же прибытия последнего в эти пять минут дуэль состоится. Какая часть дуэлей действительно заканчивается поединком?

Решение. Данная задача легко решается с использованием определения геометрической вероятности. Обозначением через x и y время прибытия в долях часа первого и второго дуэлянтов соответственно.

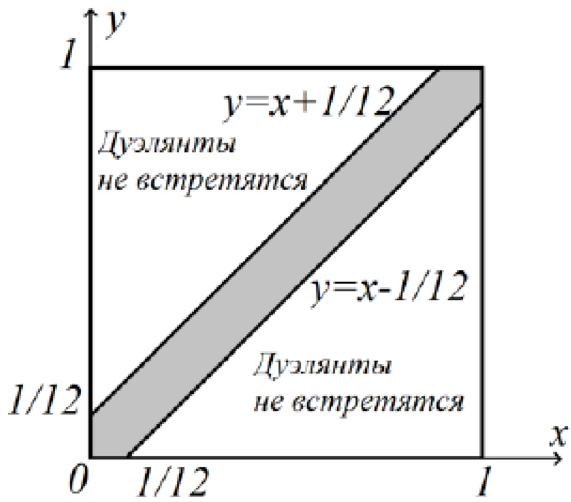


Рис. 8. Геометрическое представление примера

Тогда Закрашенная область (Рис. 8.) соответствует случаю, когда дуэлянты встретятся. Поэтому искомая вероятность – это площадь закрашенной области, т.е. вероятность того, что они встретятся, равна

$$2 \cdot ({}^1/_2 - {}^1/_2 \cdot 11/12 \cdot 11/12) = 23/144 \approx 0{,}16.$$

5.2. Парадоксы теории вероятностей

Пример 5.3. Дети мистера Смита. Мистер Смит сообщает, что у него двое детей и по крайней мере один из них мальчик. Какова вероятность того, что второй ребенок мистера Смита тоже мальчик?

Решение. Первая мысль, что вероятность равна 0,5. Но учитывая, что в семье с двумя детьми, один из которых мальчик, имеются три равновозможных варианта ММ, МД, ДМ, поэтому вероятность того, что второй ребёнок мальчик. Равна 2/3.

Пример 5.4. В условиях предыдущей задачи Смит сказал, что мальчиком является старший (или тот, кто повыше ростом, или тот, чей вес больше) из его детей. Какова вероятность того, что второй ребенок – мальчик?

Решение. В этом случае допустимые комбинации исчерпываются двумя – ММ и МД. Поэтому вероятность того, что другой ребёнок мистера Смита мальчик, возрастает до 0,5.

Пример 5.5. Странное метро. Виктор кончает работу между 15 и 17 часами. Его мать и невеста живут в противоположных частях города. Виктор садится в первый подошедший к платформе поезд, идущий в любом направлении, и обедает с той из дам, к которой приедет. Мать Виктора жалуется на то, что он редко у нее бывает. Но юноша утверждает, что его шансы отобедать с ней и с невестой равны. Он обедал с матерью дважды в течении 20 рабочих дней. Объясните это явление.

Решение. Здесь может быть приведено такое объяснение. Поезда в направлении к невесте останавливаются у перрона, куда приходит Виктор, например, в 14.00, 14.10, 14.20 и т.д. А поезда в противоположном направлении – в 14.01, 14.11, 14.21 и т.д.

Поэтому чтобы поехать к матери, Виктор должен попасть в одноминутный интервал между поездами указанных типов, а интервал ожидания поезда к невесте равен 9 минутам.

Пример 5.6. Петербургский парадокс. Предположим, что некто бросает монету и согласен уплатить вам доллар, если выпадает орел. В случае выпадения решки он бросает монету второй раз и платит вам два доллара, если при втором подбрасывании выпадает орел. Если же снова выпадает решка, он бросает монету в третий раз и платит вам четыре доллара, если при третьем подбрасывании выпадает орел. То есть с каждым разом он удваивает выплачиваемую сумму. Бросать монету некто продолжает до тех пор, пока вы не остановите игру и не предложите расплатиться. Какую сумму вы должны заплатить, чтобы некто согласился играть с вами в эту «одностороннюю игру», а вы не остались в убытке?

Решение. Покажем, что сколько бы ни платили за каждую партию, пусть даже по миллиону долларов, вы все равно сможете с лихвой окупить свои расходы. В каждой отдельно взятой партии вероятность того, что вы выиграете один доллар, равна 1/2, вероятность выиграть два доллара равна 1/4, четыре доллара – 1/8 и т.д. В итоге вы можете рассчитывать на выигрыш в сумме $\left(1 \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(2 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(4 \cdot \frac{1}{8}\right) + \cdots$. Этот бесконечный ряд расходится: его сумма равна бесконечности. Следовательно, независимо от того, какую сумму вы будете выплачивать перед каждой партией, проведя достаточно длинный матч, вы непременно окажетесь в выигрыше. Делая такое заключение, мы предполагаем, что капитал банка неограничен и мы можем проводить любое число партий. Петербургский парадокс возникает в любой азартной игре с удваивающимися ставками.

5.3. Задания для самостоятельной подготовки

1. Браун всегда ставит один доллар в рулетке на номер 13 в американской рулетке, вопреки совету своего благожелательного друга. Чтобы отучить Брауна от игры в рулетку, этот друг спорит с ним на 20 долларов, утверждая, что Браун останется в проигрыше после 36 игр. Имеет ли смысл Брауну принять это пари? (На рулетке расположены 38 одинаково вероятных номеров. Если выпадет номер игрока, то он получает свою ставку обратно в 36-кратном размере, иначе – теряет ставку.) Ответ: да.

2. Дворцовый чеканщик кладет в каждый ящик вместимостью в сто монет одну фальшивую. Король подозревает чеканщика и подвергает проверке монеты, взятые наудачу по одной в каждом из ста ящиков. Какова вероятность того, что чеканщик не будет разоблачен? Каков будет ответ, если 100 заменить на n? Ответ: 0,366. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

3. При каком минимальном числе людей в компании вероятность того, что хотя бы два из них родились в один и тот же день, не меньше 0,5? Ответ: 23.

4. Вы задались целью найти человека, день рождения которого совпадает с вашим. Сколько незнакомцев придется опросить, чтобы вероятность встречи такого человека была бы не меньше чем 0,5? Ответ: 253.

5. Сколько людей должно быть в определённой группе, чтобы по крайней мере у двоих из них дни рождения совпадали с вероятностью 99,9 %? Ответ: 68.

6. Два равносильных игрока договорились играть до шести побед. Победитель получает 80 монет при счете 5:3, серию игр пришлось прервать. Как честно разделить 80 монет? Ответ: первому игроку 70 монет, второму – 10.

7. Из хорошо перетасованной колоды в 52 карты, содержащей четыре туза, извлекаются сверху карты до появления первого туза. На каком месте в среднем появляется первый туз? Ответ: 10,6.

8. Человек стоит на расстоянии одного шага от края пропасти. Он шагает случайным образом либо к краю утеса, либо от него. На каждом шагу вероятность отойти от края равна 2/3, а шаг к краю имеет вероятность 1/3. Каковы шансы человека избежать падения?

9. A, B и C сходятся для трехсторонней дуэли. Известно, что для A вероятность попасть в цель равна 0,3, для C – 0,5, а B стреляет без промаха. Дуэлянты могут стрелять в любого противника по выбору. Первым стреляет A, затем B, дальше C и т.д. в циклическом порядке (раненый выбывает из дуэли), пока лишь один человек не останется невредимым. Какой должна быть стратегия A? Ответ: стрелять в воздух, пока один из соперников не выйдет из дуэли.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Самостоятельная работа

Самостоятельная работа

Вариант 0

1. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

2. Пусть вероятность того, что АЦ-40 потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 6 АЦ-40: а) один потребует ремонта; б) не более одного потребует ремонта.

3. Имеются три одинаковых по виду коробки. В первой коробке 10 белых шаров, во второй – 5 белых и 5 черных шаров, в третьей – 10 черных шаров. Из выбранной наугад коробки вынули белый шар. Вычислить вероятность того, что шар вынут из первой коробки.

Решение варианта № 0

1. В группе 12 студентов, серди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

Событие A – среди отобранных студентов 5 отличников.

Изначально студентов: 12= 8 отличников + 4 не отличников.

Общее количество способов выбрать 9 студентов из 12:

$$n = C_{12}^{9} = C_{12}^{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 11 \cdot 10 = 220.$$

Отобрали 9 студентов: 9 = 5 отличников + 4 не отличников:

Количество способов выбрать 5 отличников из 8: C_8^5.

Количество способов выбрать 4 не отличников из 4: C_4^4.

Тогда, общее количество благоприятных исходов:

$m = C_8^5 \cdot C_4^4 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 56$.

Искомая вероятность: $P(A) = \frac{56}{220} = \frac{14}{55} \approx 0{,}2545$.

2. Пусть вероятность того, что АЦ-40 потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 6 АЦ-40: а) один потребует ремонта; б) не более одного потребует ремонта.

Вероятность ремонта: $p = 0{,}2$ => $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Всего АЦ-40: $n = 6$.

а) Одна потребует ремонта:

$k = 1$:

$P_6(1) = C_6^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^5 = 6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}32768 = 0{,}393216.$

б) Не более одной: либо 1 либо 0.

$$P = P_6(0) + P_6(1) = C_6^0 \cdot (0{,}2)^0 \cdot (0{,}8)^6 + C_6^1 (0{,}2)^1 (0{,}8)^5 = 0{,}8^6 + 0{,}393216 =$$
$$= 0{,}262144 + 0{,}393216 = 0{,}65536$$

3. Рассмотрим гипотезы:

H_1 – выбор 1-й коробки,

H_2 – выбор 2-й коробки,

H_3 – выбор 3-го коробки.

Событие A – появление белого шара.

Т.к. выбор любой из коробок равновозможен, то $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Найдем условные вероятности для каждой гипотезы:

$$P(A/H_1) = 1;\ P(A/H_2) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2};\ P(A/H_3) = \frac{0}{10} = 0.$$

Искомая вероятность гипотезы H_1 при условии, если событие A осуществилось находим по формуле Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + P(H_3)\cdot P(A/H_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 0} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. На складе из 10 огнетушителей имеется 4 бракованных. Наугад выбирают 5 огнетушителей. Определить вероятность того, что среди этих 5 огнетушителей окажется 3 бракованных (событие A).

2. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) ровно 2 раза; б) менее 2 раз.

3. В книжном шкафу на трех полках расположены книги по пожаротушению. На первой полке 5 учебников, на второй – 2 задачника и 3 учебника, на третьей – 5 задачников. Студент с произвольной полки вынул учебник. Вычислить вероятность того, что учебник лежал на первой полке.

Самостоятельная работа

Вариант 2

1. В ПЧ-1 работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажется 3 женщины (событие A).

2. В ящике имеются по одинаковому числу огнетушителей изготовленных заводами № 1 и № 2. Найти вероятность того, что среди 4 наудачу отобранных огнетушителей заводом № 1 изготовлены: а) 2 огнетушителя; б) менее двух огнетушителей.

3. На складе находятся три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 8 яблок и 4 груши, во втором – 3 яблока и 6 груш, в третьем – 10 груш. Из выбранного наугад ящика вынули яблоко. Вычислить вероятность того, что яблоко вынули из второго ящика.

Самостоятельная работа

Вариант 3

1. Из партии, в которой 20 огнетушителей без дефекта и 5 с дефектами, берут наудачу 3 огнетушителя. Чему равна вероятность того, что все три огнетушителя без дефектов (событие A).

2. Найти вероятность того, что в семье, имеющей 4 детей: а) ровно 3 девочки; б) более 2 девочек. Предполагается, что рождение мальчика и девочки события равновероятные.

3. Имеются три одинаковые на вид урны: в первой урне 2 белых и 1 черный шар; во второй – 3 белых и 1 черный; в третьей – 2 белых и 2 черных шара. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Самостоятельная работа

Вариант 4

1. На служебной подготовке, на котором присутствуют 25 человек, в том числе 5 женщин, выбирают дружину из 5 человек. Считается, что каждый из присутствующих с одинаковой вероятностью может быть избран. Найти вероятность того, что в дружину войдут 2 женщины и 3 мужчины (событие А).

2. Вероятность появления события А при одном испытании равна 0,1. Найти вероятность того, что при трех независимых испытаниях оно появится: а) ровно 2 раза; б) не менее 2 раз.

3. В холодильнике три одинаковые полки: на первой полке стоят 3 пакета молока и 4 пакета кефира; на второй – 8 пакетов кефира; на третьей – 2 пакета кефира и 8 пакетов молока. Некто выбирает наугад с одной из полок пакет. Найти вероятность того, что это пакет кефира.

Самостоятельная работа

Вариант 5

1. Из 10 огнетушителей 8 – стандартные. Найти вероятность того, что из 6 наудачу выбранных огнетушителей 5 стандартные (событие А).

2. Найти вероятность того, что в семье, имеющей 3 детей: а) ровно 2 мальчика; б) не более 1 мальчика. Предполагается, что рождение мальчика и девочки события равновероятные.

3. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее, наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров по цвету.

Самостоятельная работа

Вариант 6

1. В отделении 10 курсантов, среди которых 4 спортсмена. По списку наудачу отобраны 6 курсантов. Найти вероятность того, что среди отобранных курсантов 2 спортсмена (событие А).

2. Пусть вероятность того, что АЦ-40 потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,3. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 7 АЦ-40: а) два потребуют ремонта; б) не менее 6 потребуют ремонта.

3. На конвейер поступают однотипные изделия, изготавливаемые двумя рабочими. При этом первый поставляет 60 %, второй – 40 % общего числа изделий. Вероятность того, что изделие, изготовленное первым рабочим окажется нестандартным, равна 0,002, вторым – 0,01. Взятое наудачу с конвейера изделие оказалось нестандартным. Определить вероятность того, что оно изготовлено первым рабочим.

Самостоятельная работа

Вариант 7

1. В корзине находится 15 красных и 4 синих шара. Наугад выбирают 6 шаров. Определить вероятность того, что среди этих 8 шаров окажется 4 красных (событие А).

2. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что «решка» выпадет: а) ровно 3 раза; б) более 4 раз.

3. При проверке качества зерен пшеницы было установлено, что все зерна могут быть разделены на 4 группы. К зернам 1-й группы принадлежат 96 %, ко второй – 2 %, к 3-й – 1 %, к 4-й – 1 % всех зерен. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен для 1-й группы равна 0,5; 2-й группы – 0,2; 3-й группы – 0,18; 4-й группы – 0,02. Найти вероятность того, что из взятого наугад зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен.

Самостоятельная работа

Вариант 8

1. На кафедре работают 5 кандидатов наук и 4 доктора наук. Для участия в конференции наудачу отобраны 3 человека. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся только кандидаты наук (событие А).

2. В коробке имеется по одинаковому числу красных и синих шаров. Найти вероятность того, что среди 8 наудачу отобранных шаров красных шаров окажется: а) ровно 3 шара; б) не более одного шара.

3. Пожарная часть получила две равные по количеству партии одноименного товара. Известно, что 25% первой партии и 40% второй партии составляет товар первого сорта. Какова вероятность того, что наугад выбранная единица товара будет не первого сорта?

Самостоятельная работа

Вариант 9

1. Во взводе 4 сержанта и 30 рядовых. Для наряда отбирают наудачу 4 человека. Чему равна вероятность того, что в наряд попадет один сержант (событие A).

2. Найти вероятность того, что в студенческой подгруппе из 8 человек: а) ровно 4 девушки; б) более 6 девушек. Предполагается, что поступление парня и девушки события равновероятные

3. Имеются три одинаковых по виду коробки. В первой коробке 6 белых шаров, во второй – 3 белых и 3 черных шаров, в третьей – 6 черных шаров. Из выбранной наугад коробки вынули белый шар. Вычислить вероятность того, что шар вынут из первой коробки

Самостоятельная работа

Вариант 10

1. Собрание, на котором присутствует 20 человек, в том числе 12 мужчин, выбирает делегацию из 6 человек. Считается, что каждый из присутствующих с одинаковой вероятностью может быть избран. Найти вероятность того, что в делегацию войдут 2 женщины и 4 мужчины (событие A).

2. Вероятность появления события A при одном испытании равна 0,4. Найти вероятность того, что при пяти независимых испытаниях оно появится: а) ровно 3 раза; б) не более 1 раза.

3. В книжном шкафу на трех полках расположены книги по пожаротушению. На первой полке 4 учебника и 2 задачника, на второй – 3 задачника и 3 учебника, на третьей – 4 задачника. Студент с произвольной полки вынул задачник. Вычислить вероятность того, что задачник лежал на первой полке.

Самостоятельная работа

Вариант 11

1. Из 15 огнетушителей 3 – бракованные. Найти вероятность того, что из 7 наудачу выбранных огнетушителей 1 бракованная (событие A).

2. Найти вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей: а) ровно 3 девочки б) не менее 4 девочек. Предполагается, что рождение мальчика и девочки события равновероятные.

3. На складе находятся три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 4 яблока и 4 груши, во втором – 3 яблока и 6 груш, в третьем – 8 яблок. Из выбранного наугад ящика вынули грушу. Вычислить вероятность того, что грушу вынули из первого ящика.

Самостоятельная работа

Вариант 12

1. В футбольной команде 16 игроков, серди которых 8 легионеров. Для игры наудачу отобраны 11 игроков. Найти вероятность того, что среди отобранных игроков окажется 6 легионеров (событие А).

2. Пусть вероятность того, что АЦ-40 потребует ремонта в течение года равна 0,7. Найти вероятность того, что из 5 АЦ-40 части: а) ровно 3 потребуют ремонта; б) не более одной потребует ремонта.

3. Имеются три одинаковые на вид урны: в первой урне 3 черных и 2 белых шара; во второй – 4 черных и 1 белый; в третьей – 3 черных и 2 белых шара. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар черный.

Самостоятельная работа

Вариант 13

1. На полке стоит 4 тома стихов и 15 томов прозы. Читатель наугад выбирает 3 книги. Определить вероятность того, что среди этих 3 книг окажется 2 тома стихов (событие А).

2. Игральную кость бросают 6 раз. Найти вероятность того, что «три» выпадет: а) ровно 4 раза; б) не менее 5 раз.

3. В холодильнике три одинаковые полки: на первой полке стоят 5 пакетов молока и 2 пакета кефира; на второй – 6 пакетов кефира и 3 пакета молока; на третьей – 3 пакета кефира и 6 пакетов молока. Некто выбирает наугад с одной из полок пакет. Найти вероятность того, что это пакет молока.

Самостоятельная работа

Вариант 14

1. Войсковая часть располагает 10 танками и 8 БТР. Для парада наудачу выбраны 10 единиц техники. Найти вероятность того, что среди выбранной техники окажется 8 танков (событие А).

2. В сумке находится одинаковое количество апельсинов и яблок. Найти вероятность того, что среди 5 наудачу отобранных фруктов яблок окажется: а) ровно 3; б) менее двух.

3. В урну, содержащую три шара, опущен черный шар, после чего из нее, наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется черным, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров по цвету.

Самостоятельная работа

Вариант 15

1. На складе 12 банок белой и 8 банок зеленой краски. Для покраски стены в пожарной части наудачу выбрали 4 банки краски. Найти вероятность того, что вся краска будет белой (событие А).

2. Вероятность выиграть по лотерейному билету равна 0,7. Какова вероятность того, что купив 10 билетов можно выиграть: а) ровно по 4 билетам; б) не более чем по одному билету.

3. На конвейер поступают однотипные пожарные рукава, изготавливаемые двумя рабочими. При этом первый поставляет 75 %, второй – 25 % общего числа пожарных рукавов. Вероятность того, что пожарный рукав, изготовленный первым рабочим окажется стандартным, равна 0,95, вторым – 0,98. Взятое наудачу с конвейера пожарный рукав оказался нестандартным. Определить вероятность того, что он изготовлен первым рабочим.

Самостоятельная работа

Вариант 16

1. В комнате находится 15 стульев и 7 табуреток. Для собрания наудачу отобраны 5 предметов мебели. Найти вероятность того, что среди них окажется 2 стула (событие А).

2. Вероятность появления события А при одном испытании равна 0,4. Найти вероятность того, что при шести независимых испытаниях оно появится: а) ровно 4 раза; б) менее 2 раз.

3. При проверке качества зерен пшеницы было установлено, что все зерна могут быть разделены на 3 группы. К зернам 1-й группы принадлежат 95 %, ко второй – 3 %, к 3-й – 2 % всех зерен. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 60 зерен для 1-й группы равна 0,6; 2-й группы – 0,18; 3-й группы – 0,22. Найти вероятность того, что из взятого наугад зерна вырастет колос, содержащий не менее 60 зерен.

Самостоятельная работа

Вариант 17

1. На прилавке находится 20 цветов, из которых 12 роз. Для букета наудачу отобраны 7 цветов. Найти вероятность того, что букет будет содержать только розы (событие А).

2. Два равносильных противника играют в шахматы. Найти вероятность того, что из 8 партий первый игрок выиграет: а) ровно 5 раз; б) более 6 раз.

3. Пожарная часть получил две равные по количеству партии одноименного товара. Известно, что 35% первой партии и 50% второй партии составляет товар первого сорта. Какова вероятность того, что наугад выбранная единица товара будет первого сорта?

Самостоятельная работа

Вариант 18

1. В группе 18 студентов, среди которых 5 хорошистов. По списку наудачу отобраны 7 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 3 хорошиста (событие А).

2. Пусть вероятность того, что АЦ-40 потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,3. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 7 АЦ-40: а) 4 потребуют ремонта; б) не более одного потребует ремонта.

3. Имеются три одинаковых по виду коробки. В первом ящике 7 красных шаров, во второй – 4 зеленых и 2 красных шара, в третьей – 2 зеленых и 6 красных шаров. Из выбранной наугад коробки вынули зеленый шар. Вычислить вероятность того, что шар вынут из второй коробки.

Самостоятельная работа

Вариант 19

1. В партии из 14 огнетушителей имеется 3 бракованных. Наугад выбирают 7 огнетушителей. Определить вероятность того, что среди этих 7 огнетушителей окажется 2 бракованных (событие А).

2. Монету бросают 12 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) ровно 5 раз; б) менее 2 раз.

3. В книжном шкафу на трех полках расположены книги по пожаротушению. На первой полке 6 учебников, на второй – 2 задачника и 4 учебника, на третьей – 4 задачника. Студент с произвольной полки вынул задачник. Вычислить вероятность того, что задачник лежал на второй полке.

Самостоятельная работа

Вариант 20

1. В ПЧ-4 работают 5 мужчин и 9 женщин. Для командировки наудачу отобраны 5 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажется 2 женщины (событие А).

2. На складе ПЧ-3 имеются по одинаковому числу изделий изготовленных цехами № 1 и № 2. Найти вероятность того, что среди 7 наудачу отобранных изделий цехом № 1 изготовлены: а) 4 изделия; б) не менее шести изделий.

3. На складе находятся три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 4 яблока и 5 груш, во втором – 5 яблок и 5 груш, в третьем – 5 яблок. Из выбранного наугад ящика вынули яблоко. Вычислить вероятность того, что яблоко вынули из третьего ящика.

Самостоятельная работа

Вариант 21

1. Из партии огнетушителей, в которой 17 без дефекта и 3 с дефектами, берут наудачу 4 огнетушителя. Чему равна вероятность того, что все 4 огнетушителя без дефектов (событие А).

2. Найти вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей: а) ровно 2 девочки; б) более 3 девочек. Предполагается, что рождение мальчика и девочки события равновероятные.

3. Имеются три одинаковые на вид урны: в первой урне 2 синих, 1 красный шар и 7 зеленых шара; во второй – 3 синих, 2 красных; в третьей – 2 синих, 2 красных и 4 зеленых шара. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар синий.

Самостоятельная работа

Вариант 22

1. Собрание курсантов, на котором присутствует 17 человек, в том числе 4 сержанта, выбирает делегацию из 7 человек. Считается, что каждый из присутствующих с одинаковой вероятностью может быть избран. Найти вероятность того, что в делегацию войдут 2 сержанта (событие А).

2. Вероятность появления события А при одном испытании равна 0,3. Найти вероятность того, что при 5 независимых испытаниях оно появится: а) ровно 3 раза; б) не менее 4 раз.

3. В холодильнике три одинаковые полки: на первой полке стоят 5 пакетов апельсинового сока; на второй – 4 пакета яблочного сока и 5 пакетов апельсинового сока; на третьей – 2 пакета апельсинового сока и 6 пакетов яблочного сока. Некто выбирает наугад с одной из полок пакет. Найти вероятность того, что это яблочный сок.

Самостоятельная работа

Вариант 23

1. Из 18 огнетушителей 15 – стандартные. Найти вероятность того, что из 8 наудачу выбранных огнетушителей 5 стандартные (событие А).

2. Найти вероятность того, что в семье, имеющей 7 детей: а) ровно 4 мальчика; б) не более 1 мальчика. Предполагается, что рождение мальчика и девочки события равновероятные.

3. В урну, содержащую два шара, опущен синий шар, после чего из нее, наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется синим, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров по цвету.

Самостоятельная работа

Вариант 24

1. В команде 14 спортсменов, среди которых 4 мастера спорта. По списку наудачу отобраны 5 спортсменов. Найти вероятность того, что среди отобранных спортсменов 2 мастера спорта (событие А).

2. Пусть вероятность того, что АЦ-40 потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 9 АЦ-40: а) 3 потребуют ремонта; б) не менее 8 потребуют ремонта.

3. На конвейер поступают однотипные пожарные рукава, изготавливаемые двумя рабочими. При этом первый поставляет 60 %, второй – 40 % общего числа пожарных рукав. Вероятность того, что пожарный рукав, изготовленный первым рабочим окажется нестандартным, равна 0,002, вторым – 0,01. Взятый наудачу с конвейера пожарный рукав оказался нестандартным. Определить вероятность того, что он изготовлен вторым рабочим.

Самостоятельная работа

Вариант 25

1. В корзине находится 12 зеленых и 7 желтых шаров. Наугад выбирают 7 шаров. Определить вероятность того, что среди этих 7 шаров окажется 3 зеленых (событие А).

2. Монету бросают 4 раза. Найти вероятность того, что «решка» выпадет: а) ровно 1 раз; б) более 2 раз.

3. При проверке качества зерен пшеницы было установлено, что все зерна могут быть разделены на 3 группы. К зернам 1-й группы принадлежат 95 %, ко второй – 3 %, к 3-й – 2 % всех зерен. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 60 зерен для 1-й группы равна 0,6; 2-й группы – 0,18; 3-й группы – 0,22. Наугад выбрали один колос, содержащий 65 зерен. Найти вероятность того, что этот колос принадлежит первой группе.

Самостоятельная работа

Вариант 26

1. На кафедре работают 7 преподавателей и 3 доцента. Для участия в конференции наудачу отобраны 4 человека. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажется 2 доцента (событие А).

2. В коробке имеется по одинаковому числу зеленых и желтых шаров. Найти вероятность того, что среди 7 наудачу отобранных шаров зеленых шаров окажется: а) ровно 4 шара; б) не более одного шара.

3. Пожарная часть получила две равные по количеству партии одноименного товара. Известно, что 35% первой партии и 50% второй партии составляет товар первого сорта. Наугад выбрали одну единицу товара и она оказалась первого сорта. Какова вероятность того, что выбранная единица принадлежит первой партии?

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Типовые расчеты

Для выбора вариантов вычислите цифры a1, a2, a3, a4. Цифры вычисляются по следующему правилу:

• a1 – остаток от деления на 5 номера в алфавите первой буквы фамилии;

• a2 – остаток от деления на 5 номера в алфавите первой буквы имени;

• a3 – остаток от деления на 5 номера в алфавите первой буквы отчества;

• a4 – остаток от деления на 5 года рождения.

Для удобства приводим алфавит:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я

Обращаем ваше внимание на то, что должны получиться целые числа от 0 до 4-х. Перед решением следует переписать задачи с подставленными в них числами.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ 1

1. Из колоды карт (36) наудачу вынимаются 6 карт. Какова вероятность того, что среди этих 6-ти карт окажутся: 1) a1 дам и a2 королей; 2) не более (a3+1) тузов.

2. В первой урне (a1+2) белых шариков и (a2+1) черных. Во второй – (a3+1) белых, (a4+3) черных и (a4+1) синих. Из первой урны во вторую случайным образом перекладывают 2 шарика. Затем из второй урны наудачу вынимают один шарик. Какова вероятность того, что он белый?

3. Среди (20+a1) студентов, среди которых (10+a2) девушек, разыгрываются (3+a3) билета, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся: а) a3 юноши; б) a4 девушки; в) 2 девушки и (1+a3) юноши.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ 2

1. Вероятность того, что огнетушитель имеет скрытые дефекты, равна (a1+1)/10. В учебное учреждение поступило 10 огнетушителей. Какое событие вероятнее: что в этой партии имеется a2 огнетушителя со скрытыми дефектами или (10–a3)?

2. На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 3 января является днем рождения одновременно a1 студента факультета?

3. Контрольную работу с первого раза пишут успешно 60 % студентов. Найти вероятность того, что контрольную работу успешно напишут:

1) (1+a1) студентов из (1+a1+a2);

2) от (6–a3)*100 до (6+a4)*100 студентов из 1000.

4. В данную пожарную часть изделия поставляются тремя фирмами в отношении (a1+1):(a2+1):(a3+1). Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют (5+a1)*10%, второй – (5+a2)*10%, третьей – (5+a3)*10%. а) Найти вероятность того, что приобретенное изделие окажется нестандартным; б) приобретенное изделие оказалось стандартным. Какова вероятность, что оно изготовлено третьей фирмой?

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ 3

1. Пусть X, Y, Z – случайные величины: X – выручка фирмы, Y – ее затраты, $Z = (X - Y)$ – прибыль. Найти распределение прибыли Z, если затраты и выручка независимы и заданы распределениями:

X:

x_i	2	3	4
p_i	(1+a1)/10	(8 – a1)/10	0,1

Y:

y_i	2	3
p_i	(1+a2)/6	(5 – a2)/6

2. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$, которая принимает значения k на отрезках [a1,1+a1+a2] и [2+a1+a2+a3, 3+a1+a2+a3+a4], а вне этих отрезков равно 0. Найти: а) значение k, при котором $f(x)$ будет плотностью вероятности, б) математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

3. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами a = a1 + a2, σ = 1 + a3 + a4. Необходимо: 1) найти и построить графики плотности вероятности и функции распределения; 2) определить вероятность попадания случайной величины в интервал (2, 5); 3) сформулировать «правило трех сигм».

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Вспомогательные таблицы

Таблица 1

Критическое значение t-критерия Стьюдента при различных уровнях значимости α

Число степеней свободы	α			Число степеней свободы	α		
	0,05	**0,01**	**0,001**		**0,05**	**0,01**	**0,001**
1	12,71	63,66	64,60	**18**	2,10	2,88	3,92
2	4,30	9,92	31,60	**19**	2,09	2,86	3,88
3	3,18	5,84	12,92	**20**	2,09	2,85	3,85
4	2,78	4,60	8,61	**21**	2,08	2,83	3,82
5	2,57	4,03	6,87	**22**	2,07	2,82	3,79
6	2,45	3,71	5,96	**23**	2,07	2,81	3,77
7	2,37	3,50	5,41	**24**	2,06	2,80	3,75
8	2,31	3,36	5,04	**25**	2,06	2,79	3,73
9	2,26	3,25	4,78	**26**	2,06	2,78	3,71
10	2,23	3,17	4,59	**27**	2,05	2,77	3,69
11	2,20	3,11	4,44	**28**	2,05	2,76	3,67
12	2,18	3,05	4,32	**29**	2,05	2,76	3,66
13	2,16	3,01	4,22	**30**	2,04	2,75	3,65
14	2,14	2,98	4,14	**40**	2,02	2,70	3,55
15	2,13	2,95	4,07	**60**	2,00	2,66	3,46
16	2,12	2,92	4,02	**120**	1,98	2,62	3,37
17	2,11	2,90	3,97	∞	1,96	2,58	3,29

Таблица 2

Критические точки распределения $\chi^2_{кр}$

	Уровень значимости α					
	0,01	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,975**	**0,99**
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Таблица 3

Таблица «Случайных чисел»

2057	0762	1429	8535	9029	9745	3458	5023	3502	2436
6435	2646	0295	6177	2755	3080	3275	0521	6623	1133
3278	0500	7573	7426	3188	0187	7707	3047	4901	3519
7888	6411	1631	6981	1972	4269	0022	3860	1580	6751
4022	6540	7804	5528	4690	3586	9839	6641	0404	0735
0888	3504	2651	9051	5764	7155	6489	2660	3341	8784
0605	4640	8692	7712	9832	6607	0480	2557	3461	9755
4398	8857	0221	3844	1823	4407	5914	7545	2362	2428
7899	2623	9965	7366	0486	8185	5896	3985	3105	7210
5375	2213	8481	0919	2350	7310	7106	0046	1683	6269
1120	5436	8921	6457	8361	9849	9902	4244	2377	9213
4625	5978	5266	7521	8488	6854	9203	2598	2673	2399
5112	4318	5003	3532	6430	5679	5041	2108	1813	4235
3915	9380	3918	5957	3603	6553	6247	8907	5282	1106
9223	5629	6982	4138	2901	7592	1650	2580	5676	6470
0122	0820	2140	5291	8499	3653	1727	0453	3032	2902
4114	2462	2820	0414	7197	3854	2940	3500	8685	6131
0774	7788	5011	4971	0848	0748	7103	3262	5182	1185
1493	3425	0114	4662	0802	1125	8745	5513	9750	0695
5727	7577	8631	0759	5430	9953	1426	0405	2109	2304
5329	2475	8555	8172	1376	3459	6778	6917	0159	9635
7058	4886	2373	5937	9383	5763	8004	8602	2457	9134
0099	2200	2369	8140	4865	4874	4867	5206	0434	3845
0659	0499	3671	2771	2104	9275	2118	8024	1033	0528

Как пользоваться: таблица случайных чисел – это такой набор цифр, что вероятность возникновения любой цифры от 0 до 9 одна и та же.

Шаг 1. Пронумеруйте все элементы генеральной совокупности от 1 до N. Например, располагая информацией, что каждый день компания производит 100 единиц товара, пронумеруйте каждую единицу продукции.

Шаг 2. Выберите точку начала считывания случайных чисел из таблицы. Точку начала считывания можно выбрать любую, например первую цифру во второй строке.

2057 0762 1429 8535 9029 9745 3458 5023 3502 2436 6435 2646 0295

6177 2755 3080 3275 0521 6623 1133 3278 0500 …

Шаг 3. Начав с выбранной точки, последовательно считывайте цифры. При этом вы получите последовательность случайных цифр для использования в дальнейшем.

6177 2755 3080 3275 0521 6623 1133 3278 0500 7573 7426 3188 0187

7707 3047 4901 3519 7888 6411 1631 6981 1972 …

Шаг 4. Объедините эти цифры в группы, размер которых равен количеству цифр в числе N. Если количество элементов в генеральной совокупности – это трехзначное число, то разбиваем на группы по три.

617 727 553 080 327 505 216 623 113 332 780 500 757 374 263 188

018 777 073 047 490 135 197 888 641 116 316 981…

Шаг 5. Считывая подряд полученную последовательность чисел, выполняйте следующие действия до тех пор, пока не получите выборку из нужного количества элементов:

а) если считываемое число между 1 и N и элемент с таким номером еще не извлекался, включите его в выборку;

б) если полученное число 0 или больше N, то отбросьте его, так как для него нет соответствующего элемента генеральной совокупности.

Пусть N = 500. Тогда считывая последовательность случайных чисел, полученную ранее, получаем, что в выборку войдут элементы с номерами выделенными курсивом.

617 727 553 *080327* 505 *216* 623 *113332* 780 *500* 757 *374263188018*

777 *073047490135197* 888 641 *116316* 981…

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. М.: Высш. шк., 1986. 80 с.

2. Беляева Н.А., Тарасов В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Сыктывкар: ИПО СГУ, 1998. 50 с.

3. Ветцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.

4. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. М.: Мир, 1999. 447 с.

5. Гмурман Г.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1979. 400 с.

6. Гмурман Г.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1972. 368 с.

7. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1975.

8. Кочетков, Е. С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ФОРУМ: ИНФРА–М, 2005 . 240с.

9. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: Дело, 2000. 688 с.

10. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. 573 с.

11. Спирина М. С., Спирин П.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Изд. центр «Академия», 2011. 352 с.

12. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. М.: Наука, 1975. 112 с.

Учебное издание

ХОНГОРОВА Ольга Викторовна

МАТЕМАТИКА. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие
по специальности 20.02.04 «Пожарная безопасность»
квалификации базовой подготовки «Техник»

Текстовое электронное издание

Подготовлено к изданию
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. Уч.-изд. л. Заказ №

Отделение организации научных исследований
научно-технического отдела
Ивановской пожарно-спасательной академии ГПС МЧС России
153040, г. Иваново, пр. Строителей, 33