ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИВАНОВСКАЯ ПОЖАРНО-СПАСАТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ
ПРОТИВОПОЖАРНОЙ СЛУЖБЫ МИНИСТЕРСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ДЕЛАМ ГРАЖДАНСКОЙ ОБОРОНЫ,ЧРЕЗВЫЧАЙНЫМ СИТУАЦИЯМ
И ЛИКВИДАЦИИ ПОСЛЕДСТВИЙ СТИХИЙНЫХ БЕДСТВИЙ»

О.В. ХОНГОРОВА, М.Г. ЕСИНА

МАТЕМАТИКА. ФУНКЦИЯ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Иваново 2020

Е83
УДК 517.935

Хонгорова О.В., Есина М.Г.

Математика. Функция. Дифференцирование функции: Учебное пособие − Иваново: ФГБОУ ВО Ивановская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России, 2020. − 172 с.

Учебное пособие содержит теоретические сведения и практические задания по основным разделам дифференциального исчисления, предусмотренным учебной программой по специальности 20.02.04 «Пожарная безопасность» квалификация базовой подготовки «Техник»

В издании разобраны задачи по темам курса, дана основная теория по теме «Функция. Предел функции. Дифференцирование функции».

Целью учебного пособия является оказание помощи обучающимся, изучающим основы дифференциального исчисления.

Издается по решению Редакционно-издательского совета
Ивановской пожарно-спасательной академии
(Протокол № 3 от 27.05.2020)

Рецензенты:

Заместитель декана физического факультета
ФГБОУ ВО Ивановский государственный университет,
к.ф.-м. н., доцент *Т.В. Пашкова*

Доцент кафедры
государственного надзора и экспертизы пожаров
(в составе УНК «Государственный надзор»)
майор внутренней службы *Е.А. Шварев*

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ....5

ГЛАВА 1. ФУНКЦИЯ....6

1.1 Функция. Определение и способы задания....6

1.2 Обратная и сложная функции....11

1.3 Основные элементарные функции....13

1.4 Параметрический способ задания функции....14

1.5 Полярные координаты....16

1.6 Графики функций....18

1.7 Задания для самостоятельной подготовки....25

ГЛАВА 2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ....33

2.1 Основные определения....33

2.2 Задания для самостоятельной подготовки....44

ГЛАВА 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ....56

3.1 Производная и дифференциал....56

3.2 Задания для самостоятельной подготовки....63

ГЛАВА 4. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ....86

4.1 Теорема Ролля....86

4.2 Теорема Коши....89

4.3 Теорема Лагранжа....90

4.4 Раскрытие неопределенностей....93

4.5 Формула Тейлора....100

4.6 Задания для самостоятельной подготовки....106

ГЛАВА 5. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ 108
5.1 Возрастание и убывание функций. Признаки монотонности 109
5.2 Точки экстремума. Необходимое условие экстремумов 113
5.3 Достаточное условие экстремума 116
5.4 Исследование на экстремум с помощью производных высших порядков 119
5.5 Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке 121
5.6 Понятие выпуклости графика функции, точек перегиба..........................131
5.7 Необходимое и достаточное условия выпуклости графика функции 133
5.8 Необходимое и достаточное условия существования точек перегиба.....136
5.9 Асимптоты графика функции 139
5.10 Общая схема исследования функций и построения графиков 142
5.11 Задания для самостоятельной подготовки 152

Приложение 1. Прикладные задачи...156
Приложение 2. Справочные материалы..160
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ...170

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель преподавания дисциплины «Математика»: дать обучающимся практическую подготовку и теоретические основы по математике для успешного освоения фундаментальных, общетехнических и специальных предметов учебного курса.

Данное учебное пособие предназначено для оказания помощи обучающимся самостоятельно приобрести навыки решения задач по темам курса Математики: «Функция. Предел функции. Дифференцирование функции», подготовиться к выполнению контрольных работ, сдаче зачета и экзамена. Приведенный в пособии теоретический материал достаточно полно охватывает курс указанного предмета.

Настоящее издание представляет собой систематическое изложение глав курса математики «Функция», «Предел функции. Дифференцирование функции» по программе технического вуза и предназначается для обучающихся по специальности 20.02.04 «Пожарная безопасность» квалификация базовой подготовки «Техник»

Теоретический материал, излагаемый в пособии, сопровождается большим числом примеров. Основные теоремы приведены с доказательствами.

В приложении к изданию предлагаются прикладные задачи по разделам математики: «Функция», Предел функции. Дифференцирование функции».

Задачи изучения математики

1. Знать основные понятия и методы исследования и решения задач читаемой дисциплины.

2. Уметь применять математические методы к решению задач; проводить конкретные расчеты в рамках выполнения аудиторных заданий и заданий для самостоятельной подготовки.

3. Иметь представление о математической символике для выражения количественных и качественных соотношений объектов; о применении теоретических рассуждений при доказательстве теорем.

ГЛАВА 1. ФУНКЦИЯ

1.1 Функция. Определение и способы задания

Сформулируем определение понятия «функция»:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1

Пусть даны два множества X и Y (непустых). Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$ называется *функцией* и записывается $y = f(x)$ или $f : X \to Y$ (говорят еще, что функция f отображает множество X на множество Y).

Рассмотрим примеры (Рис. 1.1)

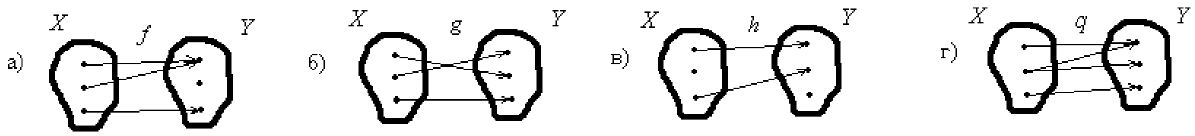


Рис. 1.1. Примеры различных отображений

На Рис. 1.1 рассмотрены примеры отображений.
В данном случае

а), б) являются функциями, так как удовлетворяют следующим условиям:

1. каждому элементу x множества X сопоставляется элемент y множества Y;

2. выполняется условие единственности сопоставления элементов множеств X и Y.

Отображения, представленные на рис. 1.1

в); г) – не являются функциональными зависимостями:

в) не каждому элементу X ставится в соответствии элемент Y;

г) не единственный y.

Если элементами множеств X и Y являются действительные числа (т.е. $x \in R$, $y \in R$), то функцию называют *числовой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2

Множество X называется ***областью определения функции*** и обозначается $D(f)$; множество всех $y \in Y$ называется *множеством значений функции* и обозначается $E(f)$.

Переменная *x* называется ***аргументом*** или независимой переменной, а *y* – ***значением функции*** (функцией) или зависимой переменной (от *x*).

Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в функциональной зависимости

$y = f(x)$ (иногда пишут $y = y(x)$).

Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$ записывают так:

$f(a)$ (или $y(a)$).

Например, если

$y(x) = 2x^2 - 3$, то $y(0) = -3$, $y(2) = 5$.

Чтобы задать функцию, необходимо указать правило, позволяющее, зная *x*, находить соответствующее значение y.

Наиболее часто встречаются следующие способы задания функции: аналитический, графический, табличный.

Аналитический способ

При ***аналитическом способе*** функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Например,

$y = x - 5$;

$$y = \begin{cases} x^2 + 1, & при\; x \geq 0 \\ x - 4, & при\; x < 0 \end{cases};$$

$y^2 - 4x = 0$.

Если область определения функции не указывается, то предполагается, что она совпадает с множеством всех значений аргумента, при которых формула имеет смысл, например, для

$y=\sqrt{x}$, $D(y)=[0;+\infty)$.

Аналитический способ является наиболее совершенным, т.к. к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию.

Графический способ

При графическом способе задается график функции.

Графиком функции $y(x)$ называется множество всех точек Oxy, абсциссами которых являются аргументы ($x \in X$), а ординатами – соответствующие им значения функции.

Например, графиком функции $y=x$ является прямая.

Графический способ удобен, когда задать функцию аналитически трудно. Часто графики вычерчиваются автоматически самопишущими приборами или изображаются на экране дисплея. Непосредственно из графика можно находить значения функции, соответствующие тем или иным значениям аргумента. По графику можно наглядно судить о поведении и свойствах функции (четность, монотонность, ограниченность, периодичность и т.д.).

Преимуществом графического способа является его наглядность, недостатком – его неточность.

Табличный способ

Табличный способ:

функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции.

Например, известны таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы. На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функции, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

Основные характеристики функций

Рассмотрим основные характеристики функции:

1) Функция $y(x)$ называется ***четной***, если для любого $x \in D$ выполняется условие $y(-x) = y(x)$ ($-x \in D$).

График четной функции симметричен относительно оси *Oy*.

Функция $y(x)$ называется ***нечетной***, если для любого $x \in D$ выполняется условие $y(-x) = -y(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Например,

$y = x^2$ – четная, т.к. $y(-x) = (-x)^2 = x^2 = y(x)$;

$y = x^3$ – нечетная, т.к. $y(-x) = (-x)^3 = -x^2 = -y(x)$, а

$y = x - 1$ – функция общего вида (т.е. ни четная, ни нечетная).

2) Функция *y(x)* называется *возрастающей (неубывающей)*, если для любых $x_1, x_2 \in D$ таких, что

$x_1 > x_2$ выполняется неравенство

$y(x_1) > y(x_2)$ ($y(x_1) \geq y(x_2)$)

Т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

На графике линия слева направо направлена снизу вверх (Рис. 1.92 а).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3

Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей (невозрастающей)***, если для любых $x_1, x_2 \in D$ таких, что

$x_1 > x_2$ выполняется неравенство $y(x_1) < y(x_2)$ ($y(x_1) \le y(x_2)$)

Т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

График идет сверху вниз (Рис. 1.2 б).

Эти функции называются ***монотонными*** (а возрастающие и убывающие – строго монотонными). Интервалы, в которых функция монотонная называются ***интервалами монотонности*** (Рис. 1.2 в).

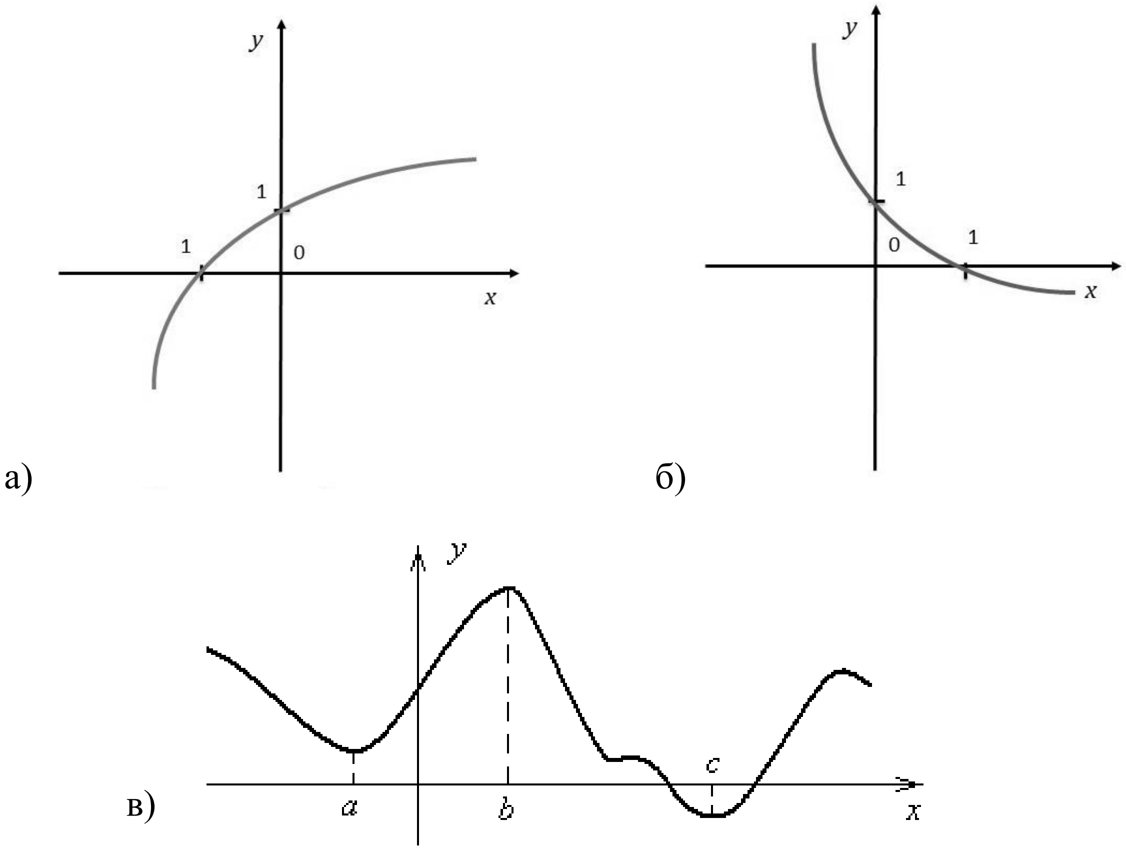


Рис. 1.2. График функции с промежутками монотонности

3) Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$.

Следовательно, график функции лежит между прямыми $y = M$ и $y = -M$ (Рис. 1.3).

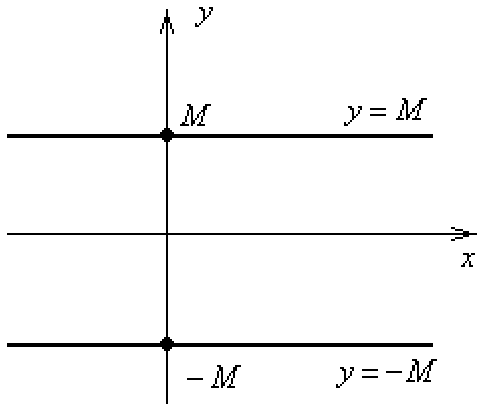


Рис. 1.3. График функции с промежутками монотонности

4) Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое число $T > 0$, что для всех $x \in D$ выполняется условие $y(x+T) = y(x)$ (если $x + T \in D$).

При этом число T называется *периодом* функции.

Периодическими будут также числа $n \cdot T$ ($n \in Z$); наименьшее положительное число, удовлетворяющее этому равенству считают основным периодом. График повторяет сам себя.

1.2 Обратная и сложная функции

Пусть задана функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ с областью определения D и множеством значений E (Рис. 1.4).

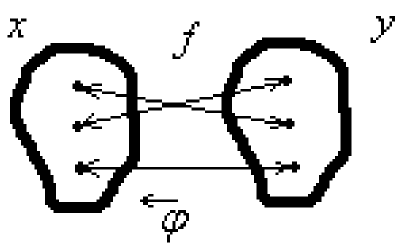


Рис. 1.4. Взаимное отображение *f(x)*

Если любому значению *y*, принадлежащему *E* соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения *E* и множеством значений *D*.

Такая функция $\varphi(y)$ называется ***обратной*** к функции $f(x)$ и записывается $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$.

Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными (Рис. 1.5).

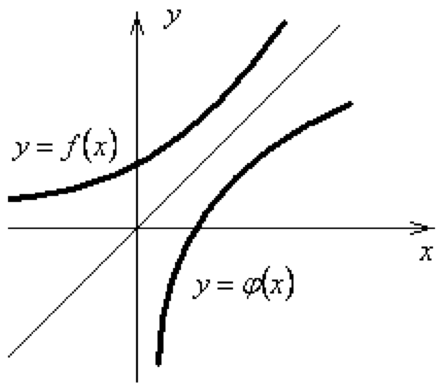


Рис. 1.5. Графики взаимно обратных функций

Например,

для $y = 2x$ обратной функцией будет $x = \dfrac{y}{2}$.

Из определения обратной функции следует, что функция $y = f(x)$ имеет обратную тогда и только тогда, когда соответствие между D и E взаимно однозначное, следовательно, любая строго монотонная функция имеет обратную (при этом если функция возрастает (убывает), то и обратная функция возрастает (убывает)).

Заметим, что обратные функции изображаются одной и той же кривой, т.е. графики их совпадают. Если же условиться считать, что, как обычно, аргумент обозначается *x*, а зависимая переменная *y*, то обратная функция запишется в виде $y = \varphi(x)$, а графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы 1 и 3 координатных углов (т.к. если точка $M_1(x_0, y_0)$

принадлежит функции, то $M_2(x_0, y_0)$ принадлежит обратной функции, т.е. симметричны относительно прямой $y = x$).

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве *D*, а функция $u = \varphi(x)$ в свою очередь на множестве D_1.

Причем для любого $x \in D$, соответствующее значение $u = \varphi(x) \in D$.

Тогда на множестве D_1 определена функция $y = f(\varphi(x))$, которая называется ***сложной функцией*** от *x* (или функцией от функции).

Переменную $u = \varphi(x)$ называют ***промежуточным аргументом***.

Например,

$y = \sin 2x$. Здесь $y = \sin u$, $u = 2x$.

Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов.

1.3 Основные элементарные функции

Постоянная функция $f(x) = c$ ($c = const$), степенная x^{α} ($\alpha \in R$), показательная a^x ($a > 0$, $a \neq 1$), логарифмическая $\log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), тригонометрические ($\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$, $ctg\, x$) и обратные тригонометрические функции ($\arcsin x$, $\arccos x$, $arctg\, x$, $arcctg\, x$) называются ***простейшими элементарными функциями.***

Все функции, получаемые с помощью арифметических действий над простейшими элементарными функциями, суперпозицией этих функций, составляют класс *элементарных функций*.

2) Функция вида

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$

где

$m \geq 0$, целое; $a_0 \neq 0$, $a_1, \ldots, a_m$ – числа,

$m \geq 0$ называется ***целой рациональной функцией*** или ***алгебраическим многочленом степени m.***

Многочлен первой степени называется также линейной функцией.

2) Функция, представляющая собой отношение двух целых рациональных функций

$$R(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n} \tag{1.1}$$

называется ***дробно-рациональной функцией***.

Совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций образует класс рациональных функций.

3) Функция, полученная с помощью арифметических действий и суперпозиций над степенными функциями, не являющаяся рациональной, называется ***иррациональной функцией***.

4) Всякая функция, не являющаяся рациональной или иррациональной называется ***трансцендентной***.

1.4 Параметрический способ задания функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4

Параметрической функцией называется функция, у которой каждый аргумент зависит от некоторого параметра, либо от нескольких параметров.

Общий вид параметрической функции от одного параметра с двумя аргументами:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

где x и y – координаты произвольной точки M, лежащей на данной линии, а t – переменная, называемая ***параметром***.

Данный параметр определяет положение точки $(x; y)$ на плоскости.

Например, если

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases},$$

то при $t = 2$ получаем точку $(2;4)$.

Если параметр t изменяется, то точка на плоскости перемещается, описывая линию – такой способ задания функции называется ***параметрическим.***

Механический смысл параметрического уравнения:

вследствие того, что точка перемещается по плоскости, уравнения называют уравнениями движения, линию – траекторией точки, t при этом есть время.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5

Неявной функцией от двух переменных называется функция вида $F(x, y) = 0$, т.е. мы не можем выразить явным образом одну из переменных функции с помощью другой переменной, но мы знаем зависимость между этими переменными.

ЗАМЕЧАНИЕ

1) Всякую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать как неявно заданную уравнением $f(x) – y = 0$, но не наоборот.
2) Не всякую неявно заданную функцию можно выразить как явно заданную функцию.

Примеры неявных функций:

$x^2 + 2xy - y^2 - 2x = 0$

$arctg\frac{x}{y} - \ln\sqrt{x^2 + y^2} = 0$

$\sin xy^2 - x^2 y - x - 3y = 0$

1.5 Полярные координаты

Под системой координат на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение точки на плоскости. Одной из таких систем является *прямоугольная (декартова)* система координат.

Каждой точке на плоскости ставилась в соответствие пара чисел x и y, называемая ее *координатами*.

Другой практически важной системой координат на плоскости является полярная.

Она задается точкой O, называемой ***полюсом***, лучом Op, называемым *полярной осью* и единичным вектором $\bar{e}$ того же направления, что и луч Op (Рис. 1.6).

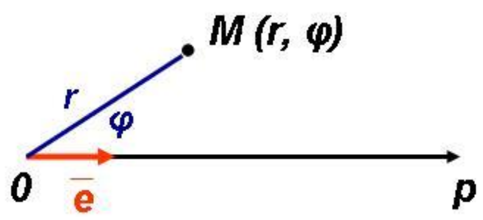


Рис. 1.6. Задание полярной системы координат

Тогда положение произвольной точки M (не совпадающей с O) определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса и углом φ, образованным отрезком ОМ с полярной осью (направление против часовой стрелки считается положительным). Числа r и φ называются полярными координатами точки M (полярный радиус и полярный угол).

Обозначение: $M(r,\varphi)$.

Установим связь между прямоугольной и полярной системой координат. Для этого совместим полюс O с началом прямоугольной системы координат, а полярную ось – с положительным направлением оси Ox (

Рис. 1.7).

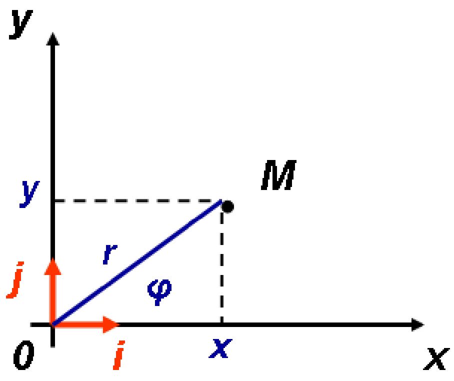


Рис. 1.7. Связь между прямоугольной и полярной системой координат

Пусть (x, y) прямоугольные, $(r; \varphi)$ – полярные координаты точки M, тогда

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad (1.2)$$

Эти соотношения следуют из прямоугольного треугольника (см. Рис. 1.7)

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = y / x \end{cases} \qquad (1.3)$$

определяя величину φ, следует установить (по знакам x и y) четверть, в которой лежит этот угол и учесть, что $0 \le \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$).

1.6 Графики функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6

Пусть X и Y – два множества.

Говорят, что имеется ***функция***, определенная на X со значениями в Y, если в силу некоторого закона f каждому элементу $x \in$ X соответствует ! элемент $y \in$ Y.

Это можно записать так:

X $\xrightarrow{f}$ Y или

f: X$\to$Y или

$x \to f$(x), где $y=f(x)$,

множество X называется ***областью определения*** функции,

а множество Y, состоящее из всех чисел вида y=f(x) – ***множеством значений*** функций.

Область определения функции f обозначается через $D(f)$, а множество значений – $E(f)$.

Значение функции $f(x)$ при $x=a$ обозначают через $f(a)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7

Графиком функции $y=f(x)$ множество точек плоскости xOy с координатами $((x,f(x)),x \in$ X).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8

Функция $f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля, называется ***четной***, если

$f(x) = f(-x)$ для каждого $x \in$ X.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция $f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля, называется ***нечетной***, если

$f(-x) = -f(x)$ для каждого x.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9

Если функция f отображает множество X в У и функция F отображает множество У во множество Z, то функция z=$F(f(x))$ называется функцией от функции или ***сложной функцией_, суперпозицией*** f и F. Она определена на X и отображает X в Z. Возможна сложная функция, в образовании которой участвуют n-функций:

$$z=F_1(F_2(\ldots(F_n(x))\ldots)) \tag{1.4}$$

При построении графиков функций применяются следующие приемы:

а) построение по точкам;

б) действие с графиком (сложение, вычитание, умножение графиков);

в) преобразование графиков (сдвиг, растяжение).

Зная график функции $y=f(x)$, можно построить график функции:

1) $y = f(x-a)$ – первоначальный график, сдвинутый вдоль оси OX на величину a;
2) $y = c\,f(x)$ – тот же график, растянутый в c раз вдоль оси OУ;
3) $y = f(x) + b$ – тот же график, сдвинутый вдоль оси OУ на величину b;
4) $y = f(k\,x)$ – тот же график, растянутый в $\frac{1}{k}$ раз вдоль оси OX.

ПРИМЕР 1.1

Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}.$$

Решение:

область определения данной функции состоит из тех значений x, при которых оба слагаемых принимают действительные значения. Для этого должны выполняться два условия:

$$\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 6-x \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le 6 \end{cases}$$

Т.о. областью определения функции является отрезок [1;6].

ПРИМЕР 1.2

Найти множество значений функции $y = 3 + 2\sin x$.

Решение:

Т.к. $|\sin x| \leq 1$ или $-1 \leq \sin x \leq 1$, то умножив все части последнего неравенства на 2, получим

$-2 \leq 2\sin x \leq 2$.

Прибавив ко всем частям последнего неравенства 3, будем иметь,

$1 \leq 3+2\sin x \leq 5$.

Таким образом,

$E(f)=[1;5]$.

ПРИМЕР 1.3

Построить график функции:

$y = x + \cos x$.

Решение:

График данной функции можно построить путем сложения графиков 2-х функций

$y = x$ и $y = \cos x$.

График первой функции есть прямая, ее можно построить по 2-м точкам, а график 2-й функции - косинусоида (Рис. 1.8).

Сложив построенные графики, получим в результате график заданной функции (Рис. 1.9).

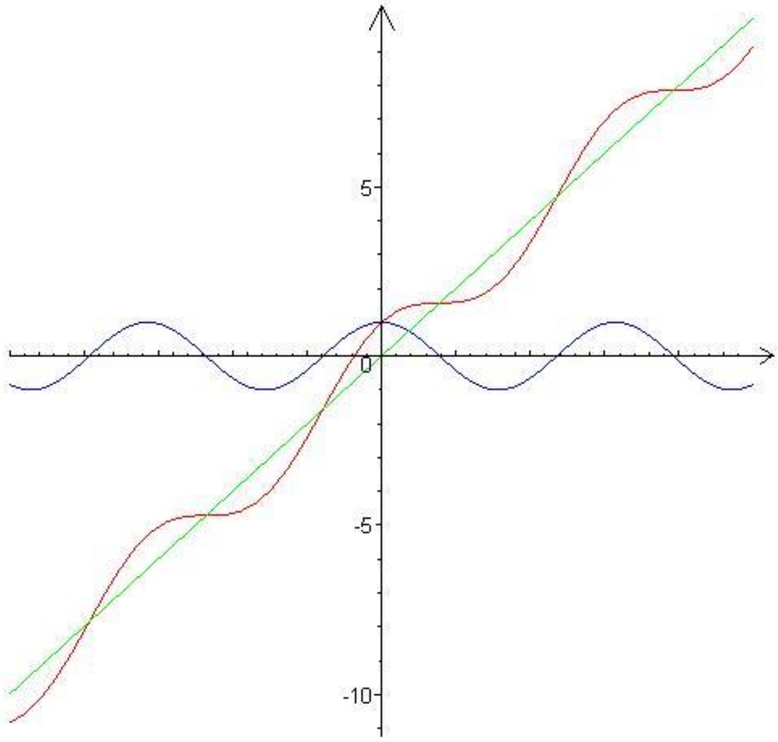


Рис. 1.8. Дополнительные построения

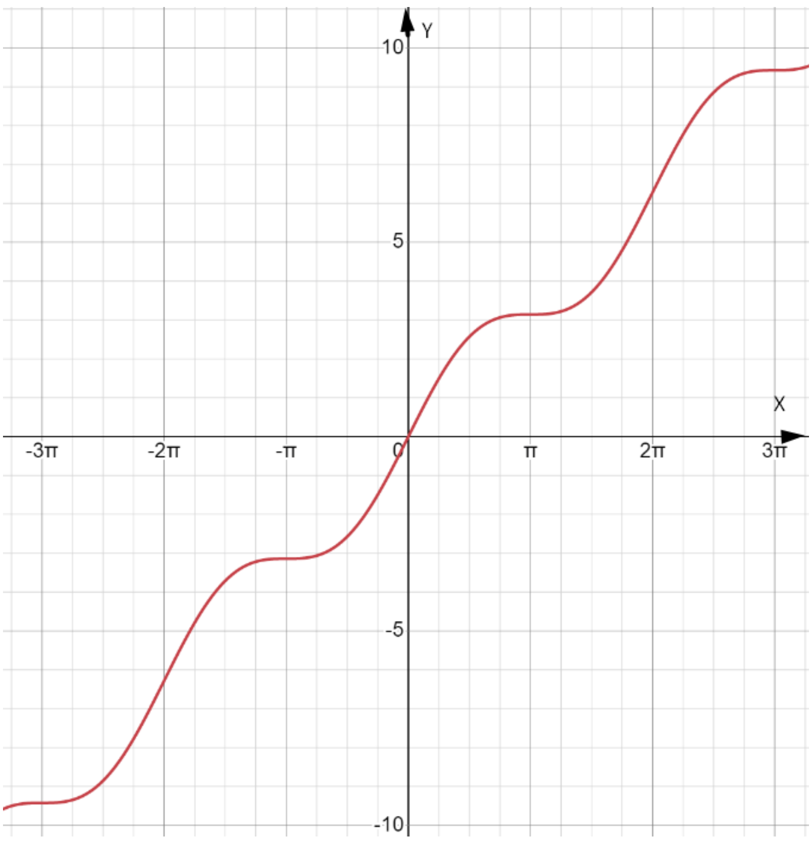


Рис. 1.9. График функции $y = x + \cos x$

ПРИМЕР 1.4

Построить график функции:

$y = 3\sin(2x - 1)$.

Решение:

Преобразуем данную функцию к виду

$y = 3\sin 2(x - \frac{1}{2})$.

В качестве исходного берем график функции

$y = \sin x$.

Строим график функции

$y = \sin 2x$

сжатием вдоль оси OX в 2 раза графика функции $y = \sin x$.

После этого строим график функции

$y = \sin 2(x - \frac{1}{2})$

путем сдвига на $\frac{1}{2}$ вправо и путем растяжения в 3 раза вдоль оси OY последнего графика получим график исходной функции

$y = 3\sin 2(x - \frac{1}{2})$.

В результате имеем график заданной функции (Рис. 1.10).

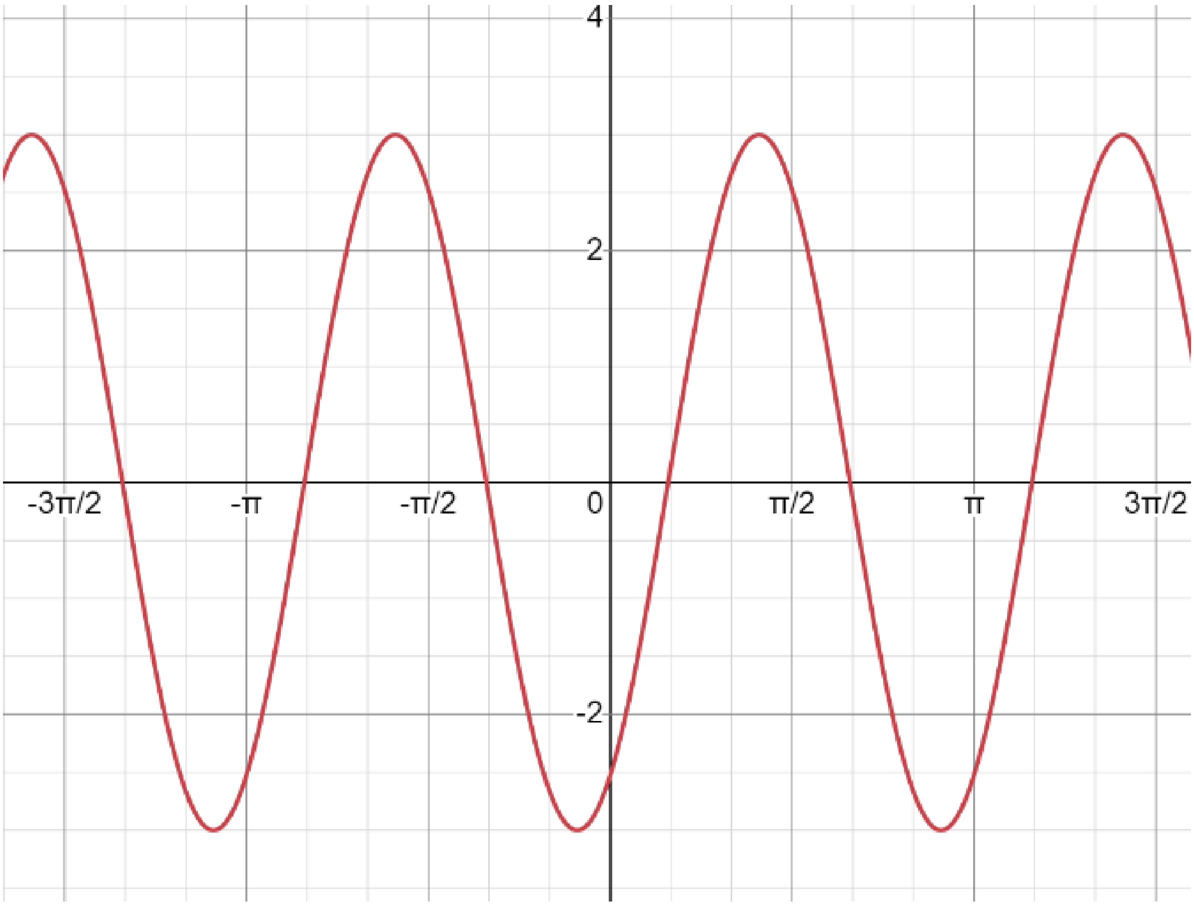


Рис. 1.10. График функции $y = 3\sin(2x - 1)$

Контрольные вопросы

1. *Что называют функцией одной переменной?*
2. *Каковы основные способы задания функции?*
3. *Как параметрически задается функция?*
4. *Как задаются полярные координаты?*
5. *Как определяется график функции?*
6. *Какие известны элементарные функции?*
7. *Какие свойства имеют функции?*
8. *Что такое график функции?*
9. *Какие есть преобразования для построения функции?*

1.7 Задания для самостоятельной подготовки

УПРАЖНЕНИЕ 1.1

Дана функция, найти ее значения в следующих точках:

Номер задания	Функция	Значения функции
1.	$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$	$f(-2),\ f(4),\ f(1-a),\ f(2)$
2.	$f(x)=\arccos(2x-1)$	$f(-2),\ f(4),\ f(1-a),\ f(2)$
3.	$f(x)=\dfrac{2x-1}{3x^2-1}$	$f(-1),\ f(1+a),\ f(\frac{\sqrt{3}}{2}),\ f(\frac{\sqrt{2}}{2})$
4.	$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -1<x<0\\ 1+x^2, & 0\le x\le 2.\end{cases}$	$f(1),\ f(\frac{\pi}{2}),\ f(-\frac{\pi}{4}),\ f(4)$
5.	$f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\le x<1,\\ x-1, & 1\le x\le 3.\end{cases}$	$f(2),\ f(0),\ f(0{,}5),\ f(-0{,}5),\ f(3)$
6.	$f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\le x<0,\\ -x+1, & 0\le x<\frac{1}{2},\\ \sin\pi x, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$	$f(-\frac{1}{2}),\ f(0),\ f(\frac{1}{2}),\ f(\frac{3}{4})$
7.	$f(x)=\begin{cases}3^x, & -1<x<0,\\ 4, & 0\le x<1,\\ 3x-1, & 1\le x\le 3.\end{cases}$	$f(2),\ f(0),\ f(0{,}5),\ f(-0{,}5),\ f(3)$
8.	$f(x)=\begin{cases}3^{-x}, & -1\le x<0\\ tg(\frac{x}{2}), & 0\le x<\pi,\\ \frac{x}{x^2-2}, & \pi\le x\le 6.\end{cases}$	$f(-1),\ f(\frac{\pi}{2}),\ f(\frac{2\pi}{3}),\ f(4),\ f(6)$

9.	$f(x)=\arcsin\frac{1}{2x-1}$	$f(0),\ f(1),\ f(\frac{3}{2}),\ f(a)$
10.	$f(x)=\lvert x\rvert-x$	$f(-1),\ f(0),\ f(-2),\ f(2)$
11.	$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1,\\ x, & 1<x\le 2.\end{cases}$	$f(0),\ f\left(\frac{1}{2}\right),\ f\left(\frac{3}{2}\right),\ f(2)$
12.	$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & -1\le x<0,\\ \sin^2 x, & 0\le x\le \pi,\\ \frac{x-1}{x+1}, & \pi<x\le 5.\end{cases}$	$f(-1),\ f\left(-\frac{1}{2}\right),\ f\left(\frac{\pi}{4}\right),\ f(4)$
13.	$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{x+1}$	$f(2),\ f\left(\frac{1}{2}\right),\ f(-1),\ f\left(\frac{1}{3}\right)$
14.	$f(x)=\sin\frac{3}{2}x+5\cos\frac{3}{4}x$	$f(0),\ f(7\pi),\ f(-12\pi)$
15.	$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & -1\le x<0,\\ x(3-x), & 0\le x\le 3,\\ \frac{x-1}{x+1}, & 3<x\le 5.\end{cases}$	$f(-1),\ f\left(-\frac{1}{2}\right),\ f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ f(4)$
16.	$f(x)=\sin 2x+5\cos 4x$	$f(0),\ f\left(\frac{7\pi}{3}\right),\ f\left(-\frac{7\pi}{4}\right),\ f(a)$
17.	$f(x)=\begin{cases} -2x, & x<-2,\\ 4, & -2\le x\le 2,\\ 2x, & x>2\end{cases}$	$f(-5),\ f(0),\ f(2),\ f(7)$
18.	$f(x)=\begin{cases} 5, & -1\le x<2,\\ x, & 2\le x<4,\\ -5, & 4\le x<8\end{cases}$	$f(1),\ f(4),\ f(7),\ f(3)$
19.	$f(x)=\arcsin x$	$f(-1),\ f(1),\ f(0),\ f\left(-\frac{1}{2}\right)$

20.	$f(x)=\cos x+\sin x$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f(0)$, $f(\pi)$, $f(-\pi)$
21.	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-2}, & x>2,\\ 5, & x\le 2\end{cases}$	$f(0)$, $f(2)$, $f(5)$, $f(8)$
22.	$f(x)=x\cdot tgx$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(a+2)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
23.	$f(x)=\frac{x+3}{x-2}$	$f\left(\frac{a}{2}\right)$, $f(3)$, $f(7)$, $f(-7)$
24.	$f(x)=\lvert x+3\rvert+\lvert x-2\rvert$	$f(-1)$, $f(5)$, $f(-8)$, $f(2)$
25.	$f(x)=\begin{cases}2x, & -1\le x\le 2\\ 4, & 2<x\le 3\\ 4-x, & x>3\end{cases}$	$f(0)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(-2)$
26.	$f(x)=5^{\frac{3}{x}}$	$f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(a-7)$

УПРАЖНЕНИЕ 1.2

Определить область определения функций:

Номер задания	Уровень сложности	
	А	В
1.	$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$	$f(x)=\sqrt{\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)-1}$
2.	$f(x)=\ln(\sin x)$	$f(x)=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$
3.	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$	$f(x)=\frac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$
4.	$f(x)=\arcsin\frac{x-3}{2}$	$f(x)=\sqrt{1-2x}+3\arcsin\frac{3x-1}{2}$

5.	$f(x)=\frac{1}{x^2-4}$	$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$
6.	$f(x)=\frac{1}{x^4-10x^2+9}$	$f(x)=x+\frac{1}{x+\frac{1}{x-3}}$
7.	$f(x)=\arccos\frac{3x+2}{4}$	$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{tgx-1}$
8.	$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4)$	$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)$
9.	$f(x)=\arcsin\frac{6x+7}{4}$	$f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$
10.	$f(x)=\arcsin\frac{1}{x+3}$	$f(x)=\frac{2^x}{1-2^{-x}}$
11.	$f(x)=\log_2\frac{x-1}{x+2}$	$f(x)=\log_3\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$
12.	$f(x)=\ln\frac{2x-1}{x+2}$	$f(x)=\sqrt{2-3x}+\lg x$
13.	$f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$	$f(x)=\sqrt{3x-1}+\frac{1}{\sqrt{5-x}}$

УПРАЖНЕНИЕ 1.3

Найти область значений функции:

Номер задания	Уровень сложности	
	А	В
1.	$f(x)=\frac{5}{x}$	$f(x)=\sqrt{\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)-1}$
2.	$f(x) = x^2 - 2x$	$f(x)=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$
3.	$f(x) = \lvert x\rvert+1$	$f(x)=\frac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$
4.	$f(x) = \arcsin\frac{x-3}{2}$	$f(x) = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin\frac{3x-1}{2}$

5.	$f(x)=\frac{1}{x^2-4}$	$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$
6.	$f(x) = 4^{-x^2}$	$f(x)=x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x-3}}$
7.	$f(x)=\arccos\frac{3x+2}{4}$	$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{tgx-1}$
8.	$f(x) = 1 - 2\cos x$	$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)$
9.	$f(x) = 1 - 2\cos 3x$	$f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$
10.	$f(x) = (x - 1)^2 - 2$	$f(x)=\frac{2^x}{1-2^{-x}}$
11.	$f(x) = (x - 3)^2 + 9$	$f(x) = 3\cos^2 x - 2$
12.	$f(x) = -x^2 + 8x - 13$	$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4)$
13.	$f(x) = 2^{-x} - 1$	$f(x)=5^{-\vert x\vert}$
14.	$f(x)=1-\sqrt{x}$	$f(x) = 2^{\vert x\vert}+3$
15.	$f(x)=\sqrt{16-x^2}$	$f(x)=\log_3\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$
16.	$f(x)=-x^2-2x+8$	$f(x)=\sqrt{2-3x}+\lg x$
17.	$f(x) = 5\cos x - 3$	$f(x)=\sin 2x+\cos 2x$
18.	$f(x)=\frac{1}{x-3}$	$f(x)=\vert x\vert-\vert x-2\vert$
19.	$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$	$f(x)=\vert x\vert+\vert x-2\vert$
20.	$f(x)=\sqrt{9-x^2}$	$f(x)=\sqrt{3x-1}+\frac{1}{\sqrt{5-x}}$
21.	$f(x)=x^2-x+1$	$f(x)=\sqrt{4x}+\lg\frac{x}{2}$

УПРАЖНЕНИЕ 1.4

Установить четность и нечетность функций:

Номер задания	Уровень сложности	
	А	В
1.	$f(x)=\frac{5}{x}$	$f(x)=\sqrt{\sin 4x-1}$
2.	$f(x) = x^2 - 2x$	$f(x)=\sqrt{tg\frac{5x-x^2}{4}}$
3.	$f(x) = \lvert 2x\rvert + 1$	$f(x)=\frac{2x^2+5}{x^4-\sqrt{x^2-4}}$
4.	$f(x)=\sin\frac{x}{2}$	$f(x) = 3\arcsin\frac{3x}{2}$
5.	$f(x)=\frac{1}{x^2-4}$	$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-5x+6}}$
6.	$f(x) = 4^{-x^2}$	$f(x)=x+\frac{2}{x+\frac{2}{x}}$
7.	$f(x) = \lvert x+2\rvert$	$f(x) = x \lg \cos x$
8.	$f(x) = x^5 - x$	$f(x) = \cos 5x$
9.	$f(x) = x^3 - 2$	$f(x)=\sqrt{1-\cos\left(x^2\right)}$
10.	$f(x) = \sin(x - 1)$	$f(x) = x^2 \sin x$
11.	$f(x) = x^2 +5x$	$f(x) = \lvert x\rvert - 5e^{x^2}$
12.	$f(x)=\frac{x-1}{x}$	$f(x) = x^2 \sqrt[3]{x} +2\sin x$
13.	$f(x)=\frac{2}{x+1}-5$	$f(x) = 2^x +2^{-x}$
14.	$f(x) = x^2 -6x +2$	$f(x) = 3x\lvert x\rvert - 2\sin x + 3\mathrm{tg}x$
15.	$f(x) = x^3 + 2\sin x + \mathrm{ctg}x$	$f(x)=\cos\frac{x^2-x}{x-1}$

16.	$f(x) = -3x^2 + 2\cos x + 3x\sin x$	$f(x)=\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$
17.	$f(x)=x^3-x$	$f(x)=\sin\dfrac{x^{31}-x^{29}}{x^2-1}$
18.	$f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$	$f(x) = \|x + 5\| + \|x - 5\|$
19.	$f(x) = 8x^3 - 7x$,	$f(x) = \|x + 3\| - \|x - 3\|$,
20.	$f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$	$f(x) = (x - 1)^2 + (x + 1)^2$
21.	$f(x)=\dfrac{1}{x^5-x}$	$f(x) = (x - 5)^2 - (x + 5)^2$
22.	$f(x) = x^3 - x + 1$	$f(x) = 2^x + \dfrac{1}{2^x}$
23.	$f(x)=\dfrac{6}{x}$	$f(x)=x\cdot 4^{-x^2}$
24.	$f(x)=\dfrac{8}{x^2}$	$f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$
25.	$f(x)=x\|x\|$	$f(x)=\left(5x^2-2x+1\right)^5+\left(5x^2+2x+1\right)^5$
26.	$f(x)=\log_3(x^2+1)$	$f(x)=\left(17x^3-x^2+x-1\right)^6+(17x^3+x^2+x+1)^6$
27.	$f(x)=\sin x^2$	$f(x)=x\sin x+e^{x^2}$
28.	$f(x)=\|x+2\|$	$f(x)=-x^2-4\ln x$
29.	$f(x)=(x-2)^2+3$	$f(x)=x^2+(x+1)^3$

УПРАЖНЕНИЕ 1.5

Построить график функции:

Номер задания	Уровень сложности	
	А	В
1.	$y=\frac{2}{x+2}$	$y=\frac{1}{x-1}+2$
2.	$y=\frac{3}{3x+2}$	$y=2^{x+1}-1$
3.	$y=2x+\frac{1}{x}$	$y=\sin x+\cos x$
4.	$y=\frac{\lvert x\rvert}{x}$	$y=-2\cos(2x+1)$
5.	$y=x^2-2\lvert x\rvert-3$	$y=10^{x-1}-2$
6.	$y=\lvert x^2+2x-3\rvert$	$y=\sin(3x-2)+1$
7.	$y=2x+1+\cos x$	$y=2\sin(2x-1)$
8.	$y=\mathrm{tg}2x$	$y=2\log_2(x-1)$
9.	$y=\mathrm{tg}\lvert x\rvert$	$y=2^{\lvert x\rvert-1}$
10.	$y=arctg(x-2)$	$y=\lvert x\rvert+x$
11.	$y=sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	$y=x-1-\lvert x-1\rvert$
12.	$y=log_2\lvert x+3\rvert$	$y=\lvert x\rvert(x-2)$

ГЛАВА 2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

2.1 Основные определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 ***на «языке последовательностей», или по Гейне***

Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ *в точке* x_0

(или при $x \to x_0$), если для любой последовательности допустимых значений аргумента

x_n, $n \in N$ $(x_n \neq x_0)$,

сходящейся к x_0, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in N$, сходится к числу A

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 ***на «языке*** $\varepsilon - \delta$***», или по Коши***

Число A называется ***пределом функции*** *в точке* x_0

(или при $x \to x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех

$x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству

$|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Короткое определение предела:

$$\left(\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall\, x : \underbrace{|x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0}_{\text{или}\ \ 0<|x-x_0|<\delta} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

Геометрический смысл предела функции:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x), \tag{2.1}$$

если для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A.

Иными словами, точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми

$$y = A + \varepsilon,\ y = A - \varepsilon. \tag{2.2}$$

Очевидно, что величина δ зависит от выбора ε, поэтому пишут

$$\delta = \delta(\varepsilon). \tag{2.3}$$

Основные пределы:

1. Предел от константы равен этой константе, то есть пусть c - константа

$$\lim_{x \to x_0} c = c; \tag{2.4}$$

2. Предел функции $y = x$, при $x \to x_0$ равен значению функции в точке x_0

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0. \tag{2.5}$$

Теоремы о пределах:

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0

1. Предел суммы (разности) этих функций равен сумме (разности) их пределов, то есть

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm \varphi(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x). \tag{2.6}$$

2. Предел произведения функций равен произведению их пределов, то есть

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot \varphi(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x). \tag{2.7}$$

2а). константу (постоянный множитель) можно выносить за знак предела функции, то есть

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x). \tag{2.8}$$

2б). так как степень функции можно представить, как произведение функции саму на себя, тогда показатель степени можно выносить за знак предела функции, то есть

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n, \tag{2.9}$$

в частности,

$$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n,\ n\in N. \tag{2.10}$$

3. Предел частного функций равен частному их пределов (при условии, что значение предела функции в знаменателе должен быть отличен от нуля), то есть

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} \varphi(x)}. \tag{2.11}$$

Теорема о промежуточной переменной

Пусть функции $f_1(x)$, $f(x)$, $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, может быть, самой данной точки) и для всех x из данной окрестности, причем $x \neq x_0$ верно неравенство $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$. Пусть, кроме того,

$$\mathrm{Lim}_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = \mathrm{A} \tag{2.12}$$

Тогда $\lim_{x\to x_0} f(x)$ также существует и равен А.

Теорема о сохранении знака

Если предел функции в данной точке x_0 положителен, то и все значения функции в некоторой окрестности этой точки (кроме, может быть, самой данной точки) положительны.

Теорема об ограниченности функции, имеющей предел

Пусть функция имеет предел в данной точке. Тогда она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Предел функции на бесконечности

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $(a; +\infty)$.

Число А называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любой положительной бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ (то есть $x_n \to +\infty$, $n \to \infty$) последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к А и обозначается $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Аналогично определяется предел функции $f(x)$ при $x \to -\infty$ и обозначается $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$

Замечательные пределы

1-ый замечательный предел

$$\lim_{x\to0}\frac{sinx}{x} = 1 \qquad (2.13)$$

2-ой замечательный предел

$$\mathrm{Lim}_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad (2.14)$$

где e – экспонента, $e \approx 2,718281828\ldots$

Часто используется следующие следствия из обоих замечательных пределов:

$$\lim_{x\to0}\frac{sin\alpha x}{x} = \alpha, \qquad \alpha \in R \qquad (2.15)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = k \cdot e, \qquad k \in R \qquad (2.16)$$

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \qquad (2.17)$$

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций:

1. Сумма (разность) бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

2. Произведение бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

3. Произведение ограниченной функции на бесконечно малых есть бесконечно малая

4. Произведение бесконечно малой функции на число есть бесконечно малая функция.

При решении многих задач используются следующие эквивалентности, верные при x → 0:

$$\sin x \sim x,\ \ 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2},\ \ tg\,x \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ \ arctg\,x \sim x \qquad (2.18)$$

Примеры вычисления пределов функций.

ПРИМЕР 2.1

№1. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-7x+4)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{3+\sqrt[4]{2x^3}}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-7x+4)=\lim\limits_{x\to 3}x^2-7\lim\limits_{x\to 3}x+4=3^2-7\cdot 3+4=9-21+4=-8$.

Б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x+4}=\dfrac{1^2-3\cdot 1+2}{1^2+1+4}=\dfrac{1-3+2}{1+1+4}=\dfrac{0}{6}=0$.

В) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{3+\sqrt[4]{2x^3}}=\sqrt{3+\sqrt[4]{2\cdot 2^3}}=\sqrt{3+\sqrt[4]{2^4}}=\sqrt{3+2}=\sqrt{5}$.

№ 2. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x-5x^2}{8x^3-4x}$; в) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}$; г) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$;

д) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$; е) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{9x^2-71x-8}{3x^2-23x-8}$; ж)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+3}{x}=\dfrac{3+3}{3}=2$.

Б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x-5x^2}{8x^3-4x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-5x}{8x^2-4}=-\dfrac{3}{4}$

в)

$$\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x+4}{x^2-2x+4}=\frac{-2+4}{4+4+4}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

Разложим на множители

$x^2+6x+8=0$

по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

$D=36-32=4$ => $x_{1,2}=\dfrac{-6\pm2}{2}$ =>

$x_1=-4$, $x_2=-2$ => $x^2+6x+8=(x+4)(x+2)$.

Г) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{3-2}{3+3}=\dfrac{1}{6}$.

Д) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-4)(x-2)}{(x-6)(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-4}{x-6}=\dfrac{2-4}{2-6}=\dfrac{1}{2}$.

Е) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{9x^2-71x-8}{3x^2-23x-8}=\lim\limits_{x\to8}\dfrac{9\left(x+\dfrac{1}{9}\right)(x-8)}{3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(x-8)}=\lim\limits_{x\to8}\dfrac{9x+1}{3x+1}=\dfrac{73}{25}$.

Ж)*

$$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x^2-1)(x-1)}{(x^2-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{1-1}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

№ 3. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{6x-x^2}{\sqrt{30+x}-\sqrt{6x}}$.

Решение:

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

Б)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{5x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2+x-2+x}{5x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

В) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+3-x^2-4x-3}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{4}{1+1}=\frac{4}{2}=2.$$

Г) $$\lim_{x\to 6}\frac{6x-x^2}{\sqrt{30+x}-\sqrt{6x}}=\lim_{x\to 6}\frac{\left(6x-x^2\right)\cdot\left(\sqrt{30+x}+\sqrt{6x}\right)}{30+x-6x}=\lim_{x\to 6}\frac{x(6-x)\left(\sqrt{30+x}+\sqrt{6x}\right)}{30-5x}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{x(x-6)\left(\sqrt{30+x}+\sqrt{6x}\right)}{5(6-x)}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 6}\left[x\left(\sqrt{30+x}+\sqrt{6x}\right)\right]=\frac{1}{5}\lim_{x\to 6}\left[6\cdot(3+6)\right]=\frac{1}{5}\cdot 6\cdot 9=\frac{54}{5}.$$

№ 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$;

Решение:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+3}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

№ 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-3x-4}$ при $a=2$, $a=-1$, $a=\infty$

Решение:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-3x-4}=\dfrac{2\cdot 2^2+2-1}{2^2-3\cdot 2-4}=\dfrac{8+2-1}{4-6-4}=\dfrac{9}{-6}=-\dfrac{3}{2}$;

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-3x-4}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}{(x+1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x-4}=\dfrac{-2-1}{-1-4}=\dfrac{3}{5}$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-3x-4}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}=\dfrac{2+0-0}{1-0-0}=2$.

№ 6. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{7x^2+34x-5}{9x^2+46x+5}$

при а) $x_0=-5$, б) $x_0=2$, в) $x_0=\infty$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{7x^2+34x-5}{9x^2+46x+5}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\dfrac{9}{11}$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{7x^2+34x-5}{9x^2+46x+5}=\dfrac{91}{133}=\dfrac{13}{19}$

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^2+34x-5}{9x^2+46x+5}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\dfrac{7}{9}$.

№ 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}-1}{2x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}-1}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-2x+1}+1\right)}{2x\cdot\left(\sqrt{x^2-2x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x+1-1}{2x\cdot\left(\sqrt{x^2-2x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{2x\cdot\left(\sqrt{x^2-2x+1}+1\right)}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-2x+1}+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{0-2}{\sqrt{0-0+1}+1}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

№ 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1-\frac{3}{4x}\right)$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1-\frac{3}{4x}\right)=\left[\begin{array}{l}\textit{Замена}\;\; t=-\frac{3}{4x}\Rightarrow x=-\frac{3}{4t}\\ \textit{Так}\;\;\textit{как}\;\; x\to\infty,\;\; \textit{то}\;\; t\to 0\end{array}\right]=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{3}{4t}\cdot\ln(1+t)\right)=-\frac{3}{4}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=-\frac{3}{4}$$

№ 9. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

$$f(x)=11^{\frac{1}{2+x}}.$$

Решение:

В точке $x_0=-2$ функция не определена => имеет разрыв.

Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -2-0} 11^{\frac{1}{2+x}}=11^{\frac{1}{2-2-0}}=11^{-\infty}=0;\qquad \lim_{x\to -2+0} 11^{\frac{1}{2+x}}=11^{\frac{1}{2-2+0}}=11^{\infty}=\infty.$$

Следовательно, в точке $x_0=-2$ функция имеет разрыв $2^{\text{го}}$ рода.

№ 10. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

$$g(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x+3}, & x<-3\\ -\sqrt{9-x^2}, & -3\le x\le 3\\ \frac{|x-3|}{x-3}, & x>3\end{cases}.$$

Решение:

Точки, «подозрительные» на разрыв $x = -3$ и $x = 3$, в остальных точках функция непрерывна.

Найдем односторонние пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -3-0}\left(-\frac{1}{x+3}\right)=-\frac{1}{-3-0+3}=\infty$;

$\lim\limits_{x\to -3+0}\left(-\sqrt{9-x^2}\right)=-\sqrt{9-(-3+0)^2}=0$ =>

$x = -3$ – точка разрыва $2^{го}$ рода

5) $\lim\limits_{x\to 3-0}\left(-\sqrt{9-x^2}\right) = -\sqrt{9-(3-0)^2} = 0$;

$$\lim_{x\to 3+0}\left(\frac{|x-3|}{x-3}\right) = \lim_{x\to 3+0}\left(\frac{x-3}{x-3}\right) = 1;$$

$x = 3$ – точка конечного разрыва $1^{го}$ рода, конечный скачок $|0-1| = 1$.

№ 11. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{e} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{б.м.}\right) = e\cdot 1 = e$.

Б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$

Замена переменной $n = 2t$, тогда получим

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2}{2t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{2} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} \cdot \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e\cdot e = e^2.$$

В) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{e}\right)^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

№ 12. Исследовать функцию $y = \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{1}{x}$ на непрерывность; найти точки разрыва функции и определить их тип.

Решение:

Точки, «подозрительные» на разрыв $x = 1$ и $x = 0$, в остальных точках функция непрерывна.

Найдем односторонние пределы:

5) $\lim\limits_{x\to 1-0} y(x) = \lim\limits_{x\to 1-0}\left(\frac{-(x-1)}{x-1}+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 1-0}\left(-1+\frac{1}{x}\right) = -1+1 = 0$;

$$\lim_{x\to 1+0} y(x) = \lim_{x\to 1+0}\left(\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 1+0}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1+1 = 2.$$

Пределы существуют, но не равны между собой =>

в точке $x=1$ функция имеет разрыв 1-го рода, конечный скачок

$|2-0|=2$.

№ 13. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}(4+3x)^{\frac{3}{x+1}}$

Решение:

$$\lim_{x\to 0-0} y(x)=\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{-(x-1)}{x-1}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0-0}\left(-1+\frac{1}{x}\right)=-\infty \Rightarrow$$

в точке $x=0$ функция имеет разрыв $2^{\text{го}}$ рода

а) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

Б)

$$\lim_{x\to -1}(4+3x)^{\frac{3}{x+1}}=$$

Замена переменных
$t=x+1$ => $x=t-1$;
при $x\to -1$, $t\to 0$

$$=\lim_{t\to 0}(4+3t-3)^{\frac{3}{t}}=\left(\lim_{t\to 0}(1+3t)^{\frac{1}{3t}}\right)^9=e^9$$

Контрольные вопросы

1. *Что такое предел функции?*
2. *Теоремы о пределах.*
3. *Какие виды пределов бывают?*

2.2 Задания для самостоятельной подготовки

УПРАЖНЕНИЕ 2.1

Индивидуальные задания по теме «Предел функции»

Вариант 1

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-3x-4}$,
при а) $x_0=2$,
б) $x_0=-1$, в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 2x}{tg^2 4x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+2|}{x+2}, & x<-2\\ \sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2\\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2\end{cases}$.

Вариант 2.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-3x+2}{4-x-3x^2}$,
при а) $x_0=-1$, б) $x_0=1$,
в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1-\dfrac{2}{3x}\right)$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=16^{\frac{1}{x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-3|}{x-3}, & x\ge 1\\ \dfrac{2}{x-1}, & x<1\end{cases}$.

Вариант 3.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-x-10}{x^2+3x+2}$,
при а) $x_0=2$, б) $x_0=-2$,
в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tg3x}{\sin^2 2x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}x+4, & x<-1\\ x^2+2, & -1\le x<1\\ 2x, & x\ge 1\end{cases}$.

Вариант 4.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-3x+2}{14-x-3x^2}$,

при а) $x_0=1$, б) $x_0=2$, в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=5^{\frac{1}{2+x}}$.

5. $g(x)=\dfrac{|x-4|}{x-4}+\dfrac{4}{x}$.

Вариант 5.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-5x+1}{3x-x^2-2}$,

при а) $x_0=-1$, б) $x_0=1$, в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 3x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=4^{\frac{1}{3-x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x<0\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{x-1}, & x>1\end{cases}$.

Вариант 6.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2-4x-6}$,

при а) $x_0=-2$, б) $x_0=-1$, в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=8^{\frac{1}{7+x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-6|}{x-6}, & x\ge 2\\ \dfrac{3}{x-2}, & x<2\end{cases}$.

Вариант 7.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{2x^2-7x+6}{6-x-x^2}$,

при а) $x_0=-2$, б) $x_0=2$, в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x\cdot\cos 5x}{\sin 3x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=5^{\frac{1}{4-x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1 \\ x^2+1, & -1<x\le 1 \\ -x+3, & x>1 \end{cases}$.

Вариант 8.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2+5x+6}{3x^2-x-14}$,

при а) $x_0=2$, б) $x_0=-2$, в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=9^{\frac{1}{7-x}}$.

5. $g(x)=\dfrac{|x+3|}{x+3}-\dfrac{3}{x}$.

Вариант 9.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{3x^2+x-4}{4x-x^2-3}$,

при а) $x_0=-1$, б) $x_0=1$, в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot tg 4x}{\sin^2 6x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=12^{\frac{1}{x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases} -\dfrac{2|x|}{x}, & x<0 \\ \sqrt{4-x^2}, & 0\le x\le 2 \\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2 \end{cases}$.

Вариант 10.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-6x-7}{3x^2+x-2}$,

при а) $x_0=-2$, б) $x_0=-1$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$.

3. $\lim\limits_{x\to -1}(3+2x)^{\frac{5}{x+1}}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=7^{\frac{1}{4+x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-5|}{x-5}, & x\geq 3\\ \dfrac{2}{x-3}, & x<3\end{cases}$.

Вариант 11.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$,

при а) $x_0=2$, б) $x_0=3$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{tg 5x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=2^{\frac{1}{8+x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}-x, & x\leq 0\\ -(x-1)^2, & 0<x<2\\ x-3, & x\geq 2\end{cases}$.

Вариант 12.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$,

при а) $x_0=0$, б) $x_0=2$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt{x+1}-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=8^{\frac{1}{6-x}}$.

5. $g(x)=\dfrac{|x+4|}{x+4}-\dfrac{4}{x}$.

Вариант 13.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$,

при а) $x_0=3$, б) $x_0=-3$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{\sqrt{2x+9}-3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\cdot\cos 7x}{\sin 2x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=3^{\frac{1}{4-x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+3|}{x+3}, & x<-3\\ \sqrt{9-x^2}, & -3\le x\le 3\\ \dfrac{1}{x-3}, & x>3\end{cases}$.

Вариант 14.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$,

при а) $x_0=-3$, б) $x_0=-2$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{4x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=12^{\frac{1}{2-x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1}, & x\ge -1\\ \dfrac{4}{x+1}, & x<-1\end{cases}$.

Вариант 15.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$,

при а) $x_0=2$, б) $x_0=4$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sqrt{x}}{-x+4x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot tg2x}{\sin^2 3x}$

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=5^{\frac{1}{x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x<1\\ x, & x\ge 1\end{cases}$.

Вариант 16.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$,

при а) $x_0=2$, б) $x_0=5$, в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x^2}-2}{x^2+2x^4}$.

3. $\lim\limits_{x\to -1}(2+x)^{\frac{1}{2x+2}}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=10^{\frac{1}{1-x}}$.

5. $g(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}+\dfrac{3}{x}$.

Вариант 17.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$,

при а) $x_0=1$, б) $x_0=-4$, в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{3}}{x-3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{x\cdot\sin 2x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=8^{\frac{1}{5-x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{3|x|}{x}, & x<0\\ \sqrt{9-x^2}, & 0\le x\le 3\\ \dfrac{1}{x-3}, & x>3\end{cases}$.

Вариант 18.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+15x+25}{x^2+15x+50}$,

при а) $x_0=5$, б) $x_0=-5$, в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{x+2}}{5x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{2x^2}}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=14^{\frac{1}{x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-7|}{x-7}, & x\ge -2\\ \dfrac{5}{x+2}, & x<-2\end{cases}$.

Вариант 19.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$,

при а) $x_0=-2$, б) $x_0=1$, в) $x_0=\infty$

.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{3x}-3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\cdot\cos 8x}{\sin 10x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=7^{\frac{1}{5+x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x^2, & 0<x\le 2\\ x+1, & x>2\end{cases}$.

Вариант 20.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+11x+8}$,

при а) $x_0=-2$, б) $x_0=-1$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{4+x}-3}{x-5}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^x$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=9^{\frac{1}{x}}$.

5. $g(x)=\dfrac{|x-5|}{x-5}+\dfrac{5}{x}$.

Вариант 21.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-2x-8}{2x^2-5x+2}$,

при а) $x_0=4$, б) $x_0=2$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{4-x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=14^{\frac{1}{5-x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+2}, & x<-2\\ -\sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2\\ \dfrac{|x-2|}{x-2}, & x>2\end{cases}$.

Вариант 22.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-3x-5}{3x^2-x-4}$,

при а) $x_0=2$, б) $x_0=-1$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{x^2+8x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=15^{\frac{1}{2-x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-4|}{x-4}, & x\ge 0\\ \dfrac{2}{x}, & x<0\end{cases}$.

Вариант 23.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-7x+2}{7x-x^2-10}$,

при а) $x_0=2$, б) $x_0=1$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=6^{\frac{1}{7-x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}x+5, & x<-2\\ x^2+2x, & -2\le x<2\\ 4x, & x\ge 2\end{cases}$.

Вариант 24.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+x-6}{3x^2-2x-16}$,

при а) $x_0=3$, б) $x_0=-2$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x+x^2}-3}{x^2+x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=18^{\frac{1}{3-x}}$.

5. $g(x)=\dfrac{|x+5|}{x+5}-\dfrac{5}{x}$.

Вариант 25.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{5x-x^2-4}{5x^2-x-4}$,

при а) $x_0=1$, б) $x_0=2$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=3^{\frac{1}{5-x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+1}, & x<-1\\ \sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 0\\ \dfrac{|x|}{x}, & x>0\end{cases}$.

Вариант 26.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+5x+3}{7x^2+8x+1}$,

при а) $x_0=-1$, б) $x_0=2$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{8x-x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x^2)^{-\frac{3}{x^2}}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=3^{\frac{1}{x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0\\ 2x^2-4, & 0<x<2\\ 2x, & x\ge 2\end{cases}$.

Вариант 27.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+5x-2}$,

при а) $x_0=1$, б) $x_0=-2$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-3}{x+x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot ctg 2x}{\sin 3x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=5^{\frac{1}{7-x}}$.

5. $g(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}-\dfrac{2}{x}$.

Вариант 28.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{5x^2-4x-1}{3x^2-2x-1}$,

при а) $x_0=3$, б) $x_0=1$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{x^2-16x}{\sqrt{x}-4}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=11^{\frac{1}{4-x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+2}, & x<-2\\ \sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2\\ \dfrac{2|x|}{x}, & x>2\end{cases}$.

Вариант 29.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-9x+10}$,

при а) $x_0=2$, б) $x_0=-1$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=15^{\frac{1}{2+x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0\\ 3x^3, & 0<x\le 2\\ x+4, & x>2\end{cases}$.

Вариант 30.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-7x+3}{4x^2-11x-3}$,

при а) $x_0=-1$, б) $x_0=3$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{27+x}-\sqrt{27-x}}{5x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{5x}}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=6^{\frac{1}{2-x}}$.

5. $g(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}+\dfrac{2}{x}$.

Вариант 31.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-16x+5}{5x^2-24x-5}$,

при а) $x_0=1$, б) $x_0=-2$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-x^2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=7^{\frac{1}{3-x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+3}, & x<-3\\ \sqrt{9-x^2}, & -3\le x\le 0\\ \dfrac{3|x|}{x}, & x>0\end{cases}$.

Вариант 32.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+13x+21}{7x^2+20x-3}$,

при а) $x_0=2$, б) $x_0=-3$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{5x^2-5x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^x$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=13^{\frac{1}{x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}x-1, & x<-3\\ 2x^2+1, & -3\le x\le 1\\ 3x, & x>1\end{cases}$.

Вариант 33.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+15x+7}{5x^2+34x-7}$,

при а) $x_0=1$, б) $x_0=-7$,

в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}5x\cdot ctg3x$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=13^{\frac{1}{5+x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|}{x-2}, & x\ge 0\\ \dfrac{3}{x}, & x<0\end{cases}$.

Вариант 34.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{5x^2-21x+4}{6x^2-23x-4}$,

при а) $x_0=4$, б) $x_0=2$, в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4x-x^2}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=5^{\frac{1}{6+x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+4}, & x<-4\\ \sqrt{16-x^2}, & -4\le x\le 4\\ \dfrac{3|x-4|}{x-4}, & x>4\end{cases}$.

Вариант 35.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6x^2-29x-5}{4x^2-21x+5}$,

при а) $x_0=-2$, б) $x_0=5$, в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{8+3x-x^2}-\sqrt{8}}{4x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arctg\, x}$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=8^{\frac{1}{7+x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}2\cos x, & x\le 0\\ x^2+2, & 0<x<2\\ x+6, & x\ge 2\end{cases}$.

Вариант 36.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{7x^2+34x-5}{9x^2+46x+5}$,

при а) $x_0=-5$, б) $x_0=2$, в) $x_0=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}-1}{2x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(1-\dfrac{3}{4x}\right)$.

Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип:

4. $f(x)=11^{\frac{1}{2+x}}$.

5. $g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+3}, & x<-3\\ -\sqrt{9-x^2}, & -3\le x\le 3\\ \dfrac{|x-3|}{x-3}, & x>3\end{cases}$.

ГЛАВА 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

3.1 Производная и дифференциал

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3.1}$$

Производная функции имеет несколько обозначений:

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx}. \tag{3.2}$$

Иногда в обозначении производной используется индекс, указывающий, по какой переменной взята производная, например, y'_x.

Нахождение производной функции называется дифференцированием этой функции.

Таблица производных основных элементарных функций

$(x)' = 1$	$(e^x)' = e^x$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(tg)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{arc}\,tgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(ctg)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{arc}\,ctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

ПРИМЕР 3.1

Найти производные функций:

а) $y = x^7$,

б) $y = 4^x$.

Решение:

а) $y = x^7$ – степенная функция.

Используя формулу производной для степенной функции, получим $y' = \left(x^7\right)' = 7x^{7-1} = 7x^6$.

б) $y = 4^x$ – показательная функция.

Используя формулу производной для показательной функции, получим

$y' = \left(4^x\right)' = 4^x \ln 4$.

Основные правила дифференцирования:

1. Производная постоянной равна нулю, т.е.

$$(c)' = 0. \tag{3.3}$$

2. Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна такой же сумме производных этих функций, т.е.

$$(u+v)' = u' + v'. \tag{3.4}$$

3. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, т.е.

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{3.5}$$

Следствие

Постоянный множитель можно выносить за знак производной $(cu)' = cu'$.

4. Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{3.6}$$

ПРИМЕР 3.2

Найти производные функций:

а) $y = \sin x + \sqrt{x}$,

б) $y = x^5 \sin x$,

в) $y = \dfrac{e^x}{\cos x}$.

Решение:

а) По правилу дифференцирования суммы двух функций, получим $y' = (\sin x)' + \left(\sqrt{x}\right)' = \cos x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

б) По правилу дифференцирования произведения двух функций, получим

$$y' = \left(x^5\right)' \cdot \sin x + x^5 \cdot (\sin x)' = 5x^4 \sin x + x^5 \cos x.$$

в) б) По правилу дифференцирования частного двух функций, получим

$$y' = \frac{\left(e^x\right)' \cdot \cos x - e^x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}.$$

Пусть переменная y есть функция от переменной u, а переменная u в свою очередь есть функция от независимой переменной x, т.е. задана сложная функция

$$y = f\left[\varphi(x)\right]. \tag{3.7}$$

ТЕОРЕМА 3.1

Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу и умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x, т.е.

$$y' = f'(u) \cdot u'. \tag{3.8}$$

ПРИМЕР 3.3

Найти производные функций:

а) $y = \left(x^2 + 3x\right)^4$, б) $y = \ln\left(x^3 + 4x\right)$, в) $y = \sin^2 x$.

Решение:

а) Функцию $y = \left(x^2 + 3x\right)^4$ можно представить в виде

$y = u^4$, где $u = x^2 + 3x$, тогда

$$y' = 4u^3 \cdot u' = 4\left(x^2 + 3x\right)^3 \cdot \left(x^2 + 3x\right)' = 4\left(x^2 + 3x\right)^3 \cdot (2x + 3).$$

б) Имеем

$y = \ln u$, где $u = x^3 + 4x$, тогда

$$y' = \frac{u'}{u} = \frac{\left(x^3 + 4x\right)'}{x^3 + 4x} = \frac{3x^2 + 4}{x^3 + 4x}.$$

в) Имеем

$y = u^2$, где $u = \sin x$, тогда

$$y = 2u \cdot u' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

Производная y' сама является функцией, которая также может иметь производную.

Производной n-го порядка называется производная от производной $(n - 1)$-*го* порядка.

ПРИМЕР 3.4

Найти производную второго порядка от функции $y = x\sin x$.

Решение:

Дифференцируя данную функцию, получим

$y' = \sin x + x\cos x$.

Дифференцируя производную y', найдем вторую производную $y'' = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2

Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{3.9}$$

Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной. Поэтому формулу для дифференцирования функции можно записать в виде

$$dy = f'(x)dx \text{, откуда} \tag{3.10}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{3.11}$$

ПРИМЕР 3.5

Найти дифференциал функции $y = \sin\left(x + x^3\right)$.

Решение:

Дифференциал функции

$$dy = \left(\sin\left(x + x^3\right)\right)' dx =$$

$$= \cos\left(x + x^3\right) \cdot \left(x + x^3\right)' dx = \left(1 + 3x^2\right)\cos\left(x + x^3\right)dx.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3

Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) d^2y функции $y=f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции, т.е.

$$d^2y=d(dy). \tag{3.12}$$

Аналогичного дифференциалом *n-го* порядка (или *n-ым* дифференциалом) d^ny называется дифференциал от дифференциала $(n-1)-го$ порядка этой функции, т.е.

$$d^ny=d\left(d^{n-1}y\right). \tag{3.13}$$

Итак, по определению

$$d^2y=d(dy). \tag{3.14}$$

Найдем выражение второго дифференциала функции $y=f(x)$.

Так как $dx=\Delta x$ не зависит от x, то при дифференцировании считаем dx постоянным:

$$d^2y=d\left(f'(x)dx\right)=\left(f'(x)dx\right)'dx=$$

$$=f''(x)dxdx=f''(x)dx^2,\ \text{т.е.} \tag{3.15}$$

$$d^2y=f''(x)dx^2.$$

Аналогично, выражение *n*-го дифференциала функции имеет вид

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n. \tag{3.16}$$

ПРИМЕР 3.6

Найти d^2y, если $y=e^{x^2+3}$.

Решение:

Так как

$y'=2xe^{x^2+3}$, $y''=2e^{x^2+3}+4x^2e^{x^2+3}$, то $d^2y=\left(2e^{x^2+3}+4x^2e^{x^2+3}\right)dx^2$.

Контрольные вопросы

1. *Что такое точки разрыва?*
2. *Какова классификация точек разрыва?*
3. *Какие задачи приводят к понятию производной?*
4. *Как найти производную функции в точке?*
5. *Приведите таблицу производных.*
6. *Какие правила дифференцирования используются при вычислении производных?*

3.2 Задания для самостоятельной подготовки

УПРАЖНЕНИЕ 3.1

Индивидуальные задания по вариантам

№ варианта	Задание для вычисления производной функции	
1	1) $y = \cos\left(\ln \frac{3x^2+1}{4}\right)$;	2) $y = \left(\ln \frac{x}{4} + 4\right)^{2x^3-3}$;
	3) $\begin{cases} x = 3t + 7t^2 \\ y = 7t^3 - 2t \end{cases}$;	4) $\cos 2y = 5x + y^2$.
2	1) $y = \ln \frac{arctg 2x}{3}$;	2) $y = (\arccos 3x)^{e^{5x}}$;
	3) $\begin{cases} x = 5\cos\frac{2t}{7} \\ y = 3\sin\frac{t}{7} \end{cases}$;	4) $\sin 3y = xy^2 + 3$.
3	1) $y = arctg \frac{\ln 8x}{8}$;	2) $y = (\cos 5x)^{3e^x}$;
	3) $\begin{cases} x = \sqrt{3}\sin 3t \\ y = \cos 3t \end{cases}$;	4) $y^2 = 7x - ctg 3y$.
4	1) $y = \arccos(\sin 2x + \frac{\pi}{4})$;	2) $y = x^{e^{\cos 5x}}$;
	3) $\begin{cases} x = 3t^2 - t \\ y = 3t^3 - 2t + 1 \end{cases}$;	4) $arctg\, 2y = x - 3y$.
5	1) $y = \sin \frac{\ln 2x}{3}$;	2) $y = (2\cos 4x - 2)^{tg\, 3x}$;
	3) $\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}$;	4) $arcctg\, 2y = 2x^2 + 5y$.

6	1) $y=\sin(\sqrt[3]{2x^2-5})$;	2) $y=\left(2x^3+1\right)^{\ln 6x}$;
	3) $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin 3t \end{cases}$;	4) $\sin 5y=7xy+2$.
7	1) $y=arctg(x^2+\ln 7x)$;	2) $y=\left(\cos\frac{x}{7}\right)^{\frac{2x}{5}}$;
	3) $\begin{cases} x=\dfrac{1+t^2}{3} \\ y=\dfrac{t+t^3}{4} \end{cases}$;	4) $\cos 3y=\ln 9x-5y$.
8	1) $y=\cos(\arcsin\frac{2x}{7})$	2) $y=\left(x^2-3\right)^{tg 7x}$;
	3) $\begin{cases} x=\dfrac{1-6t^4}{8} \\ y=\dfrac{t^2-2t}{4} \end{cases}$;	4) $e^{6y}=7\cos 6x+3y$.
9	1) $y=\arcsin(2^{2x}+3^{2x}+5^{-x})$;	2) $y=\left(\cos 9x+3\right)^{sh 8x}$;
	3) $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos\dfrac{t}{9} \end{cases}$;	4) $\sin\left(2x+3y\right)=7x+3y$.
10	1) $y=arctg(\sin 2x-\arccos 3x)$;	2) $y=\left(x^2+2x\right)^{tg 5x}$;
	3) $\begin{cases} x=\dfrac{5t^2+t}{2} \\ y=\dfrac{4t^3-t+2}{4} \end{cases}$;	4) $3xy=tg\dfrac{6y}{11}$.
11	1) $y=arctg\left[2(\arcsin 3x+\cos 2x)\right]$;	2) $y=\left(2x^3+3\right)^{th 5x}$;
	3) $\begin{cases} x=\dfrac{11t^4+3}{12} \\ y=\dfrac{5t^2}{6} \end{cases}$;	4) $\sin 2y=4xy+3x$.

12	1) $y=\arccos\sqrt{\ln(x+3)}$;	2) $y=(tg\,2x)^{4e^x}$;
	3) $\begin{cases} x=\cos\dfrac{3t}{5} \\ y=\sin\dfrac{6t}{5} \end{cases}$;	4) $arctg\dfrac{3y}{13}=7x+3y$.
13	1) $y=arcctg(x+\log_2 5x)$;	2) $y=(ctg\,3x)^{2e^x}$;
	3) $\begin{cases} x=e^{t-1} \\ y=e^{3t+1} \end{cases}$;	4) $e^{2y}=\dfrac{2x-3y}{5}$.
14	1) $y=ctg[\ln(4-\sqrt[4]{x})]$;	2) $y=x^{\arcsin 4x}$;
	3) $\begin{cases} x=3^{2t-1} \\ y=9^{5t-1} \end{cases}$;	4) $\cos 14y+7x^3=2y$.
15	1) $y=4^{arctg(\sqrt{x-1})}$;	2) $y=\left(x^8+1\right)^{th\,6x}$;
	3) $\begin{cases} x=\sin 6t \\ y=\cos 2t \end{cases}$;	4) $3xy=ctg\dfrac{2y}{7}$.
16	1) $y=\log_2(x^2+tg2x)$;	2) $y=\left(x^2+1\right)^{\cos 5x}$;
	3) $\begin{cases} x=3t^3+1 \\ y=t^2 \end{cases}$;	4) $\cos 2y=7xy+3$.
17	1) $y=\arccos[ctg(4x)]$;	2) $y=(\sin 2x)^{5x/2}$;
	3) $\begin{cases} x=2\cos 4t \\ y=\sin 3t \end{cases}$;	4) $tg\,5y=2x+3y$.
18	1) $y=\arcsin(\sqrt[4]{x^2-2x})$;	2) $y=\left(x^4+5\right)^{ctg\,3x}$;
	3) $\begin{cases} x=\dfrac{t^3+1}{18} \\ y=\dfrac{t^2+t+1}{9} \end{cases}$;	4) $\sin 4y=3x-8y$.
19	1) $y=arctg\sqrt{2+\ln 3x}$;	2) $y=\left(2x^3+4\right)^{ch\,4x}$;
	3) $\begin{cases} x=t^2-3t^4 \\ y=2t-t^3 \end{cases}$;	4) $xy^2-e^{4y}=7x+3$.

20	1) $y=\sin[\ln(1+\sqrt[5]{x})]$;	2) $y=x^{\cos 4x^2}$;
	3) $\begin{cases} x=t(1-\sin 5t) \\ y=t\cos 3t \end{cases}$;	4) $\cos 3y=4xy^3-2$.
21	1) $y=\cos\left(\ln\frac{3x^2+1}{4}\right)$;	2) $y=\left(\ln\frac{x}{4}+4\right)^{2x^3-3}$;
	3) $\begin{cases} x=3t+7t^2 \\ y=7t^3-2t \end{cases}$;	4) $\cos 2y=5x+y^2$.
22	1) $y=\ln\frac{arctg 2x}{3}$;	2) $y=(\arccos 3x)^{e^{5x}}$;
	3) $\begin{cases} x=5\cos\frac{2t}{7} \\ y=3\sin\frac{t}{7} \end{cases}$;	4) $\sin 3y=xy^2+3$.
23	1) $y=arctg\frac{\ln 8x}{8}$;	2) $y=(\cos 5x)^{3e^x}$;
	3) $\begin{cases} x=\sqrt{3}\sin 3t \\ y=\cos 3t \end{cases}$;	4) $y^2=7x-ctg 3y$.
24	1) $y=\arccos(\sin 2x+\frac{\pi}{4})$;	2) $y=x^{e^{\cos 5x}}$;
	3) $\begin{cases} x=3t^2-t \\ y=3t^3-2t+1 \end{cases}$;	4) $arctg\, 2y=x-3y$.
25	1) $y=\sin\frac{\ln 2x}{3}$;	2) $y=(2\cos 4x-2)^{tg\, 3x}$;
	3) $\begin{cases} x=3\cos 2t \\ y=\sin 4t \end{cases}$;	4) $arcctg\, 2y=2x^2+5y$.
26	1) $y=\sin(\sqrt[3]{2x^2-5})$;	2) $y=(2x^3+1)^{\ln 6x}$;
	3) $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin 3t \end{cases}$;	4) $\sin 5y=7xy+2$.

27	1) $y = arctg(x^2 + \ln 7x)$;	2) $y = \left(\cos\frac{x}{7}\right)^{\frac{2x}{5}}$;
	3) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^2}{3} \\ y = \dfrac{t+t^3}{4} \end{cases}$;	4) $\cos 3y = \ln 9x - 5y$.
28	1) $y = \cos(\arcsin\frac{2x}{7})$	2) $y = (x^2 - 3)^{tg\,7x}$;
	3) $\begin{cases} x = \dfrac{1-6t^4}{8} \\ y = \dfrac{t^2-2t}{4} \end{cases}$;	4) $e^{6y} = 7\cos 6x + 3y$.
29	1) $y = \arcsin(2^{2x} + 3^{2x} + 5^{-x})$;	2) $y = (\cos 9x + 3)^{sh\,8x}$;
	3) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos\dfrac{t}{9} \end{cases}$;	4) $\sin(2x + 3y) = 7x + 3y$.
30	1) $y = arctg(\sin 2x - \arccos 3x)$;	2) $y = (x^2 + 2x)^{tg\,5x}$;
	3) $\begin{cases} x = \dfrac{5t^2+t}{2} \\ y = \dfrac{4t^3-t+2}{4} \end{cases}$;	4) $3xy = tg\dfrac{6y}{11}$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.2

Индивидуальные задания по вариантам по темам «Предел функции. Дифференцирование функции»

Вариант 1.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{\frac{x}{2}}-2-x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\cos x)\cdot ctg\, x\right]$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{x}{x+2}$; б) $\begin{cases} x=\cos(t/2) \\ y=t-\sin t \end{cases}$; в) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\ln(\sin\sqrt{x})$;

б) приближённое значение $\dfrac{1}{0{,}997}$.

Вариант 2.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-1-2x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\arcsin x\cdot ctg\, x\right]$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{1}{2x+1}$; б) $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$; в) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\sin^3 2x$;

б) приближённое значение $1{,}01^7$.

Вариант 3.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)+3x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{x}{6(x+1)}$; б) $\begin{cases} x=e^{2t} \\ y=\cos t \end{cases}$; в) $x^2+xy+y^2=4$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=arctg\sqrt{x^2+1}$;

б) приближённое значение $\sqrt[3]{1{,}06}$.

Вариант 4.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}[x\cdot ctg\,\pi x]$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{-22}{x+5}$; б) $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=4\sin^2 t \end{cases}$; в) $arctg\,y=x+y$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=x^2\sin\sqrt{x}$;

б) приближённое значение $1{,}013^4$.

Вариант 5.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)^2}{\sin^2(x-3)}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{3x}{x+5}$;   б) $\begin{cases} x=3\cos^2 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$;   в) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=x\sqrt{1+x^2}$;

б) приближённое значение $\dfrac{1}{0{,}998}$.

Вариант 6.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+0{,}5x)-x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{1}{2-3x}$;   б) $\begin{cases} x=3\cos\dfrac{t}{2} \\ y=t-\sin t \end{cases}$;   в) $(x-1)^2+(y+3)^2=25$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\ln(\cos\sqrt{x})$;

б) приближённое значение $1{,}02^6$.

Вариант 7.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\sin x}-1}{\sin 2x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(2-2\cos 3x\right)\cdot ctg\,4x\right]$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{x}{x+7}$; б) $\begin{cases} x=e^{3t} \\ y=\cos t \end{cases}$; в) $x^2+2y^2=8$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\cos^3 4x$;

б) приближённое значение $\sqrt[3]{1{,}04}$.

Вариант 8.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x-6x}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x-2\right)\cdot\ln\left(x-2\right)$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{-3}{x+6}$; б) $\begin{cases} x=6\cos t \\ y=8\sin^2 t \end{cases}$; в) $arcctg\,y+2x=3y$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=arcctg\sqrt{x^2+2}$;

б) приближённое значение $1{,}012^3$.

Вариант 9.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+1)\cdot e^{-2x}\right]$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{x}{x-3}$; б) $\begin{cases} x=4\sin 5t \\ y=\cos 5t \end{cases}$; в) $x^3+y^3-4=0$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\ln\left[\sin(2x+5)\right]$;

б) приближённое значение $\dfrac{1}{0{,}992}$.

Вариант 10.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2x}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(tg 3x\cdot\ln 2x\right)$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{2}{5x+3}$; б) $\begin{cases} x=2e^{3t}+1 \\ y=e^{6t}-4 \end{cases}$; в) $x^2+y^2-5=0$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=arctg\left(e^{2x}\right)$;

б) приближённое значение $1{,}04^5$.

Вариант 11.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$;

б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1}{\cos 2x}-tg2x\right)$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{2x}{x-5}$; б) $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=\sqrt{t} \end{cases}$; в) $x^2+\sin y=y$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\arcsin\sqrt{1-3x}$;

б) приближённое значение $\sqrt[4]{1{,}03}$.

Вариант 12.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2-x}}$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{-3}{7x-2}$; б) $\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=2e^{3t}+1 \end{cases}$; в) $x^2+tg\,y+1=0$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=x^3\ln x$;

б) приближённое значение $1{,}08^6$.

Вариант 13.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6\sin 2x - 12x}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{4}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{x - 2} \right)$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y = \dfrac{5x}{2 - x}$; б) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = 2t^2 + 1 \end{cases}$; в) $x^2 + y^3 - 4 = 0$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y = 3^{arctg\, x^3}$;

б) приближённое значение $\dfrac{1}{0{,}991}$.

Вариант 14.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 4x - 4x}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x \to -3} (x + 3)^{x+3}$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y = \dfrac{7}{4 - 5x}$; б) $\begin{cases} x = 2\sin 4t + 1 \\ y = 3\cos 4t - 2 \end{cases}$; в) $\ln y + x^2 - 2 = 0$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y = arctg\left(tg^2 x\right)$;

б) приближённое значение $2{,}03^3$.

Вариант 15.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 4x-8x}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{2e^{4x}-2}\right)$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{-2x}{3+x}$; б) $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=4\sin 2t-1 \end{cases}$; в) $2x^2-y^3+5=0$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\ln(\arcsin\sqrt{1-x^2})$;

б) приближённое значение $\sqrt[4]{1{,}07}$.

Вариант 16.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{-3x}-2+3x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(tg 2x)^{4x}$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{-15}{2+3x}$; б) $\begin{cases} x=t^3+3 \\ y=2\ln t \end{cases}$; в) $2x^3+y^2+4=0$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\ln\left[tg\left(x^3\right)\right]$;

б) приближённое значение $2{,}011^5$.

Вариант 17.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x-3x}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 5x)^{2x}$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{4x}{5(2+x)}$; б) $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=t^3+8t \end{cases}$; в) $x^2-\sin y+2=0$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\ln(arctg\sqrt{x-1})$;

б) приближённое значение $\dfrac{1}{0{,}97}$.

Вариант 18.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+\ln\sin x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\left[(x-3)^2\cdot\ln(x-3)\right]$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{3}{x+8}$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{t}-2 \\ y=t^3+4 \end{cases}$; в) $x^3+\ln y+2=0$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=e^{arctg\sqrt{2x-1}}$;

б) приближённое значение $2{,}07^4$.

Вариант 19.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{\ln(x-1)}\right)$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{2x}{x-3}$; б) $\begin{cases} x=\sin^3 t \\ y=\cos t \end{cases}$; в) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{7}=1$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\arcsin\sqrt{1-4x^2}$;

б) приближённое значение $\sqrt[7]{1{,}08}$.

Вариант 20.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-2)}{\ln(e^x-e^2)}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\pi-4x)^{\cos 2x}$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{8}{2-7x}$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$; в) $arctg\, y=4x+5y$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\ln\left[\sin\left(2^x\right)\right]$;

б) приближённое значение $3{,}017^5$.

Вариант 21.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1-5x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\frac{1}{tg\,2x}}$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{-5x}{x+9}$; б) $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$; в) $3x+\sin y=5y$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=e^{\arcsin\sqrt{1-x}}$;

б) приближённое значение $\dfrac{1}{0{,}994}$.

Вариант 22.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)+7x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{tg(x-1)}$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{9}{5x-3}$; б) $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$; в) $y=e^y+4x$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=arctg\left[\ln\left(x+4x^2\right)\right]$;

б) приближённое значение $1{,}016^4$.

Вариант 23.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^{2x}-3-6x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 2x)\cdot ctg\, 3x$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{x}{2(x+5)}$; б) $\begin{cases} x=2-t^4 \\ y=t^2-t^3 \end{cases}$; в) $tg\, y=3x+5y$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\ln(\arcsin\sqrt[3]{x})$;

б) приближённое значение $\sqrt[3]{1{,}05}$.

Вариант 24.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)^2}{\sin^2(x-5)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}[\arcsin 3x\cdot ctg\, 2x]$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{3}{8-7x}$; б) $\begin{cases} x=t-t^2 \\ y=2-t^3 \end{cases}$; в) $2x+y=ctg\, y$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\sin[\ln(1+x)]$;

б) приближённое значение $1{,}012^7$.

Вариант 25.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)-x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\sin(x-1)}$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{-4x}{x-7}$; б) $\begin{cases} x=t^2-3t^4 \\ y=3-t^3 \end{cases}$; в) $\sin y = 7x^2+3y$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=e^{\sqrt{arctg\,4x}}$;

б) приближённое значение $\dfrac{1}{0{,}993}$.

Вариант 26.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2\sin x}-1}{\sin 3x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}[2x\cdot ctg\,3\pi x]$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{12}{3x+4}$; б) $\begin{cases} x=3\cdot(1-\sin t) \\ y=2\cos t \end{cases}$; в) $\cos y = 2x-5y$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\ln\left(x^2+\sqrt{x^2+1}\right)$;

б) приближённое значение $2{,}03^8$.

Вариант 27.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 4x-2x}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x+3^x\right)^{\frac{1}{4x}}$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{7x}{4(x+1)}$; б) $\begin{cases} x=t^3+1 \\ y=t^2+t+1 \end{cases}$; в) $e^y=2x-3y$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\arccos\sqrt{4x^2-2}$;

б) приближённое значение $\sqrt[4]{1{,}04}$.

Вариант 28.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 2x}{2\sin^2 x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 5x)^{\frac{2}{3x^2}}$.

2. Найти $y''(x)$: а) $y=\dfrac{-5}{9-x}$; б) $\begin{cases} x=3^t \\ y=t^3 \end{cases}$; в) $y=7x-ctg3y$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\arcsin\left[tg\left(4x^2\right)\right]$;

б) приближённое значение $1{,}09^5$.

Вариант 29.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x+7x}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(3-3\cos 4x\right)\cdot ctg\,5x\right]$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{3x}{8(3-x)}$; б) $\begin{cases} x=e^{t-1} \\ y=e^{3t+1} \end{cases}$; в) $\cos y=y-7x$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\cos\left[\ln\left(1+e^{2x}\right)\right]$;

б) приближённое значение $\dfrac{1}{0{,}995}$.

Вариант 30.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x}+e^{-x}-3}{3\sin^2 x}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\left[\left(x+1\right)\cdot\ln\left(x+1\right)\right]$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{2}{9x+2}$; б) $\begin{cases} x=\cos(t/3) \\ y=2-\sin(t/3) \end{cases}$; в) $\sin y=y^2+3x$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=3^{\sqrt{arcctg\,2x}}$;

б) приближённое значение $1{,}07^4$.

Вариант 31.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 3x - 15x}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left[(x-2)\cdot e^{-5x}\right]$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y = \dfrac{-6x}{5(x-1)}$; б) $\begin{cases} x = 2e^{3t} \\ y = e^{5t} - 3 \end{cases}$; в) $\cos y = 4y^3 - 2x$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y = \arcsin\sqrt{4x - x^2}$;

б) приближённое значение $\sqrt[5]{1{,}08}$.

Вариант 32.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x - 2x}{2x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left[tg 7x \cdot \ln 3x\right]$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y = \dfrac{4}{3+7x}$; б) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$; в) $5x = x^3 + y^3$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y = arctg\left[\ln(x - \cos x)\right]$;

б) приближённое значение $1{,}03^9$.

Вариант 33.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{5x}-2+5x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\dfrac{1}{\cos 3x}-tg3x\right)$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{8x}{x-9}$; б) $\begin{cases} x=2\sin^3 t \\ y=3\cos^2 t \end{cases}$; в) $\sin y=3x-8y$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\arcsin\left[\ln\left(\sqrt{x}-1\right)\right]$;

б) приближённое значение $\dfrac{1}{0{,}996}$.

Вариант 34.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln x}{2+3\ln\sin x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4x}-\dfrac{1}{3e^{5x}-3}\right)$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{11}{5x+6}$; б) $\begin{cases} x=2t^2+3 \\ y=2\sqrt{t} \end{cases}$; в) $\cos 2y=7y+3x$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=3^{\arcsin\sqrt{2x}}$;

б) приближённое значение $2{,}02^4$.

Вариант 35.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4x-1}{\sin^2 3x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{12x}{5(4-x)}$; б) $\begin{cases} x=\ln(3t) \\ y=3t^3-1 \end{cases}$; в) $3x+y=ctg2y$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=arctg\sqrt{2+\ln x}$;

б) приближённое значение $\sqrt[6]{1{,}03}$.

Вариант 36.

1. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln(x-4)}{\ln\left(e^x-e^4\right)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{2}{4-x}}$.

2. Найти $y''(x)$:

а) $y=\dfrac{-7}{2+11x}$; б) $\begin{cases} x=2\cos 5t \\ y=2\sin 5t+3 \end{cases}$; в) $\cos y+7x^3=2y$.

3. Найти:

а) Дифференциал функции $y=\arccos[ctg(4x)]$;

б) приближённое значение $1{,}015^5$.

ГЛАВА 4. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

4.1 Теорема Ролля

Рассмотрим ряд теорем, имеющих большое теоретическое и прикладное значение.

Теорема Роля

Пусть на $[a;b]$ определена функция $f(x)$, причем:

1) $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$;

2) $f(x)$ дифференцируема на $[a;b]$;

3) на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a)=f(b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $c\in(a;b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в ноль, т.е.

$$f'(c)=0.$$

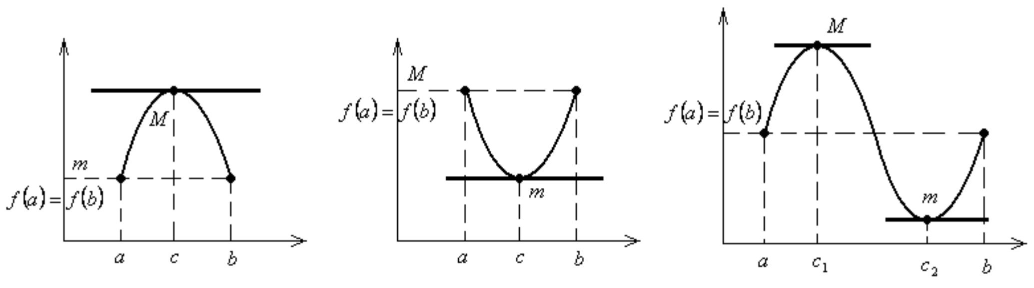
Доказательство:

Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений, соответственно M и m (т.е. $m\le f(x)\le M$).

Если $M=m$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a;b]$:

$f(x)=m=M=const$ и ее производная $f'(x)=0$ в любой точке $[a;b]$.

Если $M\ne m$, то функция достигает хотя бы одно из значений M или m во внутренней точке c интервала $(a;b)$, т.к. по условию $f(a)=f(b)$ (Рис. 4.1).



а) б) в)

Рис. 4.1. Иллюстрация к доказательству для трех случаев

Пусть, например, функция принимает значение M в точке $c \in (a;b)$.

Тогда для всех $x \in (a;b)$ выполняется неравенство

$f(c) \geq f(x)$,

т.к. $f(c) = M$ – наибольшее значение) и, следовательно,

$f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$ (вычитая из меньшего числа большее получаем отрицательное число).

Функция дифференцируема на $(a;b)$, следовательно, в любой точке интервала существует производная.

Найдем производную в точке c.

По определению

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \qquad (4.1)$$

Как показано выше, числитель этой дроби отрицателен, следовательно, знак дроби зависит от знаменателя.

Если $\Delta x > 0$ (т.е. $\Delta x \to 0$ справа от точки $x = c$), то $\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$ и, следовательно, $f'(c) \leq 0$.

Если $\Delta x < 0$ (т.е. $\Delta x \to 0$ слева от точки $x = c$), то $\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$ и, следовательно, $f'(c) \geq 0$.

Соотношения $f'(c) \leq 0$ и $f'(c) \geq 0$ совместимы лишь в том случае, если $f'(c) = 0$, т.е. внутри отрезка $[a;b]$ есть точка, в которой производная функции равна нулю.

В случае, $f(c) = m$ доказательство аналогичное.

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox (см. на рис. 4.1) (т.к. $f'(c)$ – это угловой коэффициент касательной и он равен нулю, то касательная будет параллельна оси Ox).

Отметим, что все три условия теоремы Ролля существенны. Если не выполняется хотя бы одно из них, то утверждение теоремы может оказаться неверным.

В математике существенность тех или иных условий доказываемых теорем проверяется построением соответствующих примеров, когда невыполнение того или иного условия теоремы приводит к тому, что утверждение теоремы становится неверным.

Например,

1) для $f(x)=x$ на $[0;1]$ 1 и 2 условия выполнены, а 3-е условие не выполнено: $f(0)\neq f(1)$ (Рис.4.2 а).

Следовательно, для рассмотренного примера не существует такого значения *c*, при котором $f'(c)=0$.

2) $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$. 2 и 3 условия выполнены, а первое (непрерывность) – нет, следовательно, не выполняется теорема Ролля.

3) $f(x)=|x|, \quad x\in[-1;1]$. (Рис. 4.2 б) 1 и 3 условия выполняются, второе (нет производной в точке $x=0$) нет, следовательно, не выполняется теорема Ролля.

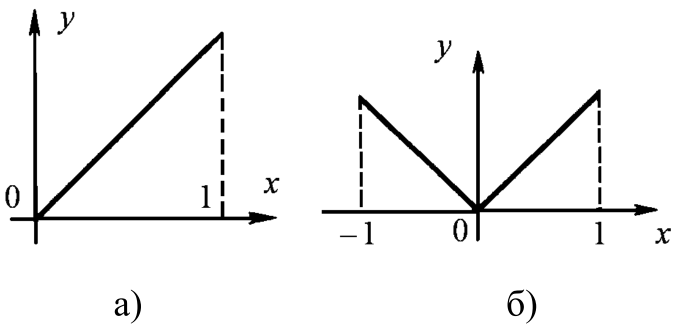


Рис. 4.2. Контрпримеры

4.2 Теорема Коши

Теорема Коши

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$:

1) непрерывны на отрезке $[a;b]$,

2) дифференцируемы на интервале $(a;b)$,

3) причем $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a;b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Доказательство:

Отметим, что

$$\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$$

(т.е. формула имеет смысл), т.к. в противном случае по теореме Ролля нашлась бы точка c, такая, что $\varphi'(c) = 0$, чего не может быть по условию теоремы.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot (\varphi(x) - \varphi(a)).$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

1) непрерывна на $[a;b]$ (показали, что $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$),

2) дифференцируема на $[a;b]$, т.к. представляет из себя линейную комбинацию непрерывных и дифференцируемых функций $f(x)$ и $\varphi(x)$,

3) на концах отрезка принимает одинаковые значения

$F(a) = F(b) = 0$, действительно,

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot (\varphi(a) - \varphi(a)) = 0$$ и

$$F(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\cdot(\varphi(b)-\varphi(a))=f(b)-f(a)-(f(b)-f(a))=0.$$

Следовательно, по теореме Ролля, найдется точка $x=c\in(a;b)$ такая, что $F'(c)=0$.

Учитывая условие:

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\cdot\varphi'(x),$$

получаем,

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\cdot\varphi'(c)=0 \quad => \quad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\cdot\varphi'(c).$$

Поделим обе части равенства на $\varphi'(c)$, получим

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$

Эту теорему еще называют теоремой об отношении приращений двух функций, т.к. $f(b)-f(a)$ и $\varphi(b)-\varphi(a)$ – приращения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$.

4.3 Теорема Лагранжа

Теорема Лагранжа

Пусть на $[a;b]$ определена функция $f(x)$, причем:

1) $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$;
2) $f(x)$ дифференцируема на $[a;b]$.

Тогда существует хотя бы одна точка $c\in(a;b)$ такая, что выполняется равенство $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$.

Доказательство:

теорему Лагранжа можно рассматривать как частный случай теоремы Коши, положив $\varphi(x) = x$, тогда

$\varphi(b) - \varphi(a) = b - a$, а $\varphi'(x) = x' = 1 \quad => \quad \varphi'(c) = 1$.

Подставим эти значения в формулу Коши:

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ или

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Полученную формулу называют *формулой Лагранжа* или *формулой о конечном приращении*: приращение дифференцируемой функции на отрезке $[a; b]$ равно приращению аргумента, умноженному на значение производной в некоторой внутренней точке этого отрезка.

Выясним геометрический смысл этой теоремы.

Рассмотрим отношение: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$:

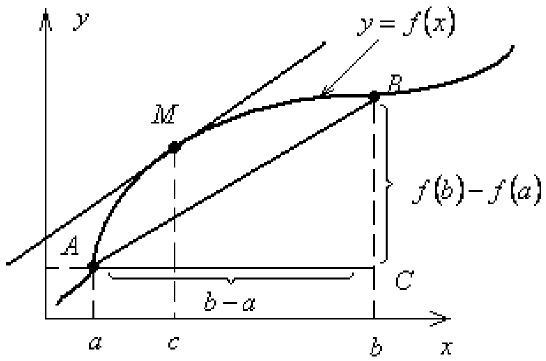


Рис. 4.3. Геометрическая иллюстрация к теореме Лагранжа

1) Отношение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ есть угловой коэффициент секущей *AB*.

Данное соотношение определяет отношение противолежащего катета к прилежащему в треугольнике *ABC* равно тангенсу угла наклона *AB* к положительному направлению оси Ox

2) $f'(c)$ равна угловому коэффициенту касательной к кривой $f(x)$ в некоторой точке *M*.

Так как они равны, то существует на кривой точка с абсциссой *c*, в которой касательная к графику функции параллельна секущей *AB*.

Следствие 1:

Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

Доказательство:

Пусть $f'(x)=0$ для всех $x \in (a;b)$.

Возьмем произвольные x_1 и x_2 из $(a;b)$, пусть $x_1 < x_2$.

Тогда по теореме Лагранжа существует $c \in (x_1; x_2)$ такая, что $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)$.

Но $f'(c)=0$, т.к. по условию $f'(x)=0$ для всех $x \in (a;b)$, то $f(x_2)-f(x_1)=0$ => $f(x_2)=f(x_1)$.

Т.к. x_1 и x_2 – произвольные точки из $(a;b)$, то для всех $x \in (a;b)$ имеем $f(x)=const$.

Следствие 2:

Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Доказательство:

Пусть $f_1'(x)=f_2'(x)$ при $x \in (a;b)$.

Тогда рассмотрим функцию $f_1(x)-f_2(x)$ и найдем $(f_1(x)-f_2(x))' = f_1'(x)-f_2'(x)=0$ => согласно следствию 1 имеем $f_1(x)-f_2(x)$ есть const, т.е. $f_1(x)-f_2(x)=c$ для любого $x \in (a;b)$.

4.4 Раскрытие неопределенностей

Иногда при формальной подстановке числа a в функцию $f(x)$ и при дальнейшем вычислении значения функции приходят к выражениям вида:

$$\text{а) } \frac{0}{0}; \quad \text{б) } \frac{\infty}{\infty}; \quad \text{в) } \infty - \infty; \quad \text{г) } 0^0; \quad \text{д) } 1^\infty; \quad \text{е) } \infty^0.$$

Эти выражения с точки зрения алгебры являются бессмыслицей, но, исходя из понятий математического анализа, удобно придавать им в некоторых случаях определенный смысл. Именно, если функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x = a$, исключая саму точку a, то под $f(a)$ понимают $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Вычисление этого предела есть *раскрытие неопределенности*. Функцию $f(x)$, имеющую в точке $x = a$ неопределенность одного из указанных выше типов, можно изменить так, чтобы неопределенность новой функции имела вид $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ (эти неопределенности называют основными.)

Используя рассмотренные выше теоремы, можно получить правило, значительно упрощающее вычисление пределов функции в случае неопределенностей различных видов. Рассмотрим его.

Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ есть *неопределенность вида* $\frac{0}{0}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Раскрыть эту неопределенность – значит вычислить $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, если он существует, или установить, что он не существует. Следующая теорема устанавливает правило для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Историческая справка: Правило названо именем французского математика Г.Ф. Лопиталя, впервые опубликовавшего его в первом печатном учебнике по дифференциальному исчислению в 1696 г.

Маркиз Гильом Франсуа Лопиталь родился в 1661 г. и уже в молодости занялся серьезными математическими исследованиями. Благодаря своему таланту и трудолюбию Лопиталь стал известен как один из виднейших математиков Франции того времени.

Прочитав «Новый метод» Лейбница, Лопиталь сразу же, стал одним из его приверженцев и составлял собственные записи по разным вопросам, связанным с дифференциальным исчислением. В 1692 г. в Париж приехал один из ближайших сотрудников Лейбница – Иоганн Бернулли. Лопиталь его пригласил в свое имение. Здесь в Турени они провели четыре месяца и совместно занимались математикой. В том же году началась переписка Лопиталя с Лейбницем, а в конце 1692 г. в «Acta Eruditorum» появилась статья Лопиталя и И. Бернулли. В последующие годы Лопиталь наряду с Лейбницем, Гюйгенсом и братьями Бернулли решает ряд актуальных в то время экстремальных задач.

Теорема (правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$)

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$.

Пусть $\varphi'(x)\neq 0$ в окрестности точки x_0.

Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ (конечный или бесконечный), то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

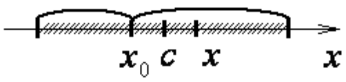
Доказательство:

Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке $[x_0;x]$, лежащего в окрестности точки x_0, следовательно,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\text{, где } c\in[x_0;x].$$

учитывая, что $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$, получим

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$



При $x\to x_0$ величина *c* также стремится к x_0.

Перейдем в этом равенстве к пределу: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{c\to x_0}\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Т.к. по условию существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{c\to x_0}\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}=l$, следовательно, и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ тоже существует.

Итак, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$

ч.т.д.

Полученное выражение читают так: предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения их производных, если последний существует.

Замечание 1. Теорема верна и в случае, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены при $x = x_0$, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$.

(Достаточно положить $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ и $\varphi(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$).

Замечание 2. Теорема справедлива и в том случае, когда $x \to \infty$.

Действительно, положив $x = \dfrac{1}{z}$, имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z\to 0}\frac{f(1/z)}{\varphi(1/z)} = \lim_{z\to 0}\frac{f'(1/z)}{\varphi'(1/z)} = \lim_{z\to 0}\frac{f'(1/z)\cdot\left(-1/z^2\right)}{\varphi'(1/z)\cdot\left(-1/z^2\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\text{, т.е.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Замечание 3. Если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то теорема Лопиталя можно применить еще раз:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ и т.д.}$$

Примеры.

1. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)'}{(x\ln x)'} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln x + 1} = 1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 6x)'}{\left(2x^2\right)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin 6x}{4x} = \dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$$= \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 6x)'}{x'} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 6x}{1} = \frac{3}{2}\cdot 6\cdot\cos 0 = 9$$

Здесь два раза пришлось применять правило Лопиталя, т.к. отношение первых производных при $x = 0$ опять привело к неопределенности $\dfrac{0}{0}$.

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$.

Этот предел существует и равен 1.

Действительно, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$.

Но отношение производных $\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\frac{1+\cos x}{1}=1+\cos x$ при $x\to\infty$ не стремится ни к какому пределу, а колеблется между 0 и 2. Таким образом, этот предел по правилу Лопиталя вычислить нельзя.

Рассмотренная теорема дает возможность раскрывать неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Сформулируем без доказательства теорему о раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема (правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$):

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме, может быть, точки x_0), в этой окрестности $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, $\varphi'(x)\neq 0$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Замечания, сделанные к предыдущей теореме, справедливы и в этом случае.

К основным неопределенностям сводятся случаи других неопределенностей, которые символически записываются так: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}.

Рассмотрим их.

1. $(0\cdot\infty)$: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=$ [преобразуем произведение в дробь]

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)\ \text{(или}\ \lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\text{)}.$$

Например,

$$\lim_{x\to 2}\left((2-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{4}}\cdot\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}.$$

2. $(\infty-\infty)$: Пусть $f(x)\to\infty$ и $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Тогда получаем:

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-\varphi(x)\right)=$ [представим функции в виде дроби]

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right)=$$ [приведем к общему знаменателю]

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot\varphi(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

На практике это преобразование выглядит проще.

Пример.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x\cdot(x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)==$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

3. (1^∞, ∞^0, 0^0): Пусть или $f(x)\to1$ и $\varphi(x)\to\infty$; или $f(x)\to\infty$ и $\varphi(x)\to0$; или $f(x)\to0$ и $\varphi(x)\to0$ при $x\to x_0$.

Для нахождения предела вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$ удобно сначала прологарифмировать выражение $A=f(x)^{\varphi(x)}$: $\ln A=\varphi(x)\cdot\ln f(x)$, затем найти предел $\lim\limits_{x\to x_0}A=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\ln f(x)$, а затем пропотенцировать выражение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\ln f(x)}$. Можно пользоваться этой формулой, а можно просто запомнить суть преобразования: 1) прологарифмировать; 2) найти предел; 3) пропотенцировать выражение.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x)^{\frac{1}{x^2}}=(1^\infty)$.

1) Прологарифмируем: $A=(\cos2x)^{\frac{1}{x^2}}$ => $\ln A=\frac{1}{x^2}\ln(\cos2x)$.

2) Найдем предел:

$$\lim_{x\to0}\ln A=\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos2x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(\ln\cos2x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot(-\sin2x)\cdot2}{2x}=-2\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}\,2x}{2x}=-2$$

.

3) $\ln\lim\limits_{x\to0}A=-2$ => $\lim\limits_{x\to0}A=e^{-2}$ => $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$.

Решение можно оформить короче, воспользовавшись готовой формулой:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{2\sin 2x}{\cos 2x}}{2x}} = e^{-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,2x}{2x}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

4.5 Формула Тейлора

Рассмотрим одну из главных формул математического анализа, имеющую многочисленные применения как в самом анализе, так и в смежных дисциплинах.

В определении функции $y = f(x)$ не говорится о том, при помощи каких средств находятся значения y по значениям x. В тех случаях, когда функция является формулой вида $y = \frac{x^3}{5} - 5x + 7$, значения функции найти легко с помощью четырех арифметических действий. Но как найти значения, например, функции $y = \sin x$, $y = \ln(1+x)$ при любых (допустимых) значениях аргумента?

Чтобы вычислить значения данной функции $y = f(x)$, ее заменяют многочленом $P_n(x)$ степени n, значения которого всегда и легко вычисляемы. Обоснование такой возможности (представлять функцию многочленом) дает *формула Тейлора*.

Пусть функция $f(x)$ есть многочлен $P_n(x)$ степени n:

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n.$$

Преобразуем этот многочлен также в многочлен степени n относительно разности $x - x_0$ (по степеням $x - x_0$), где x_0 – произвольное число, т.е. представим $P_n(x)$ в виде $P_n(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + \ldots + C_n(x - x_0)^n$.

Для нахождения коэффициентов $C_0, C_1, \ldots, C_n$ продифференцируем $P_n(x)$ n раз:

$$P_n'(x)=C_1+2C_2(x-x_0)+3C_3(x-x_2)^2+\ldots+nC_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$P_n''(x)=2C_2+3\cdot 2\cdot C_3(x-x_0)+4\cdot 3\cdot C_4(x-x_2)^2+\ldots+n(n-1)C_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$P_n'''(x)=2\cdot 3\cdot C_3+2\cdot 3\cdot 4\cdot C_4(x-x_2)+\ldots+n(n-1)(n-2)C_n(x-x_0)^{n-3}$$

……………………..

$$P_n^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot C_n.$$

Найдем функцию P_n и ее производные в точке x_0 (т.е. подставим $x=x_0$), имеем:

$P_n(x_0)=C_0$, т.е. $C_0=P_n(x_0)$

$P_n{}'(x_0)=C_1$, т.е. $C_1=\dfrac{P_n'(x_0)}{1!}$

$P_n''(x_0)=2C_2$, т.е. $C_2=\dfrac{P_n''(x_0)}{2!}$

$P_n'''(x_0)=2\cdot 3\cdot C_3$, т.е. $C_3=\dfrac{P_n'''(x_0)}{3!}$

……………………..

$P_n^{(n)}(x_0)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot C_n$, т.е. $C_n=\dfrac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}$

Подставляя найденные значения $C_0, C_1, \ldots, C_n$ в равенство $P_n(x)$, получим разложение многочлена n -й степени $P_n(x)$ по степеням $(x-x_0)$:

$$P_n(x)=P_n(x_0)+\frac{P_n'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{P_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Даная формула называется *формулой Тейлора для многочлена* $P_n(x)$ *степени* n (или *многочленом Тейлора*).

Пример. Разложить многочлен $P(x)=-4x^3+3x^2-2x+1$ по степеням $(x+1)$.

Здесь $x_0=-1$; $P_0=P(-1)=4+3+2+1=10$.

$P'(x) = -12x^2 + 6x - 2$; $\quad P'(-1) = -12 - 6 - 2 = -20$.

$P''(x) = -24x + 6$; $\quad$. $P''(-1) = 24 + 6 = 30$

$P'''(x) = -24$; $\quad P'''(-1) = -24$.

Следовательно,

$$P(x) = -4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 10 + \frac{-20}{1} \cdot (x+1) + \frac{30}{2!} \cdot (x+1)^2 + \frac{-24}{3!} \cdot (x+1)^3 =$$

$$= 10 - 20(x+1) + 15(x+1)^2 - 4(x+1)^3.$$

Рассмотрим теперь произвольную функцию $y = f(x)$. Формула Тейлора позволяет, при определенных условиях, приближенно представить (аппроксимировать) произвольную функцию $f(x)$ в виде многочлена и дать оценку погрешности этого приближения.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно. Найдем многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, значение которого в точке $x = x_0$ равно значению самой функции $f(x_0)$, а значения его производных до n-го порядка в точке $x = x_0$ равны значениям соответствующих производных от функции $f(x)$ в этой точке:

$$P_n(x_0) = f(x_0); \quad P_n'(x_0) = f'(x_0); \quad P_n''(x_0) = f''(x_0); \ \ldots; \ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Естественно ожидать, что такой многочлен в некотором смысле «близок» к функции $f(x)$ и будет иметь вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

т.е. (4.2) учитывая равенства (4.3).

Обозначим через $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ => $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, или в развернутом виде:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

– *формула Тейлора для функции* $f(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен Тейлора, а $R_n(x)$ – *остаточный член формулы Тейлора*.

Для тех значений x, для которых остаточный член $R_n(x)$ мал, многочлен $P_n(x)$ дает приближенное представление функции $f(x)$.

Таким образом, формула Тейлора дает возможность заменить функцию $y = f(x)$ многочленом $P_n(x)$ с соответствующей степенью точности, равной значению остаточного члена $R_n(x)$.

Если в формуле Тейлора положить $x_0 = 0$, то она примет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

– *формула Маклорена*. Она дает разложение функции по степеням самой независимой переменной. Однако для многих функций эта простейшая формула Тейлора неприменима, т.к. при $x = 0$ многие функции и их производные не существуют ($\ln x$, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, $\operatorname{ctg} x$).

Рассмотрим разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена:

1) $y(x) = e^x$. Т.к. $f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n+1)}(x) = e^x$, то формула Маклорена имеет вид: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n$, т.е.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

где погрешность этого приближения R_n стремится к нулю. Можно показать, что $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$ $(0 < \theta < 1)$.

Т.е. можно аппроксимировать функцию e^x многочленом Маклорена с любой желаемой степенью точности и повышение степени дает повышение точности аппроксимации:

$n=1$: $e^x \approx 1+x$; $n=2$: $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}$; $n=3$: $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$.

Найдем число e с точностью до 0,001,

т.е. $e=e^1=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta 1}}{(n+1)!}$.

Для нахождения e с точностью до 0,001 определим n из условия, что $R_n<0{,}001$: $\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<0{,}001$. Т.к. $0<\theta<1$, то $e^{\theta}<e^1<3$, $\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<0{,}001$ => подбираем $n=7$:

$\frac{e^{\theta}}{7!}<\frac{3}{5040}=0{,}0006<0{,}001$ =>

$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\approx 2+0{,}5+0{,}1667+0{,}0417+0{,}0083+0{,}0014=2{,}7181\approx 2{,}718$.

2) $f(x)=\sin x$. Т.к. $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$,

то $f^{(n)}(0)=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & n-\textit{четное}\\ -1, & n-\textit{нечетное}\end{cases}$.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots.$$

3) $f(x)=\cos x$. Т.к. $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$,

то $f^{(n)}(0)=\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & n-\textit{четное}\\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & n-\textit{нечетное}\end{cases}$.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

4) $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ ($\alpha\in R$).

Т.к. $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\cdot(1+x)^{\alpha-n}$, то $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)$, следовательно, формула Маклорена:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

В частности, когда $\alpha = n$ (натуральное число), $f^{(n+1)}(x) = 0$ => получим известную из элементарной математики формулу бинома Ньютона:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n.$$

5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \ldots$

Таким образом, с помощью формул Тейлора и Маклорена многие трансцендентные и сложные алгебраические функции с определенной степенью точности можно заменять (аппроксимировать) многочленами, являющимися наиболее простыми элементарными функциями (над ними удобно выполнять арифметические действия, нетрудно вычислять значения многочлена в любой точке). Это имеет огромное практическое значение.

4.6 Задания для самостоятельной подготовки

Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя:

1.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-6x}-1+2x}{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$
11. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin 2x-12x}{x^3}$.
13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)+3x}{x^2}$.
14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x-6x}{x^3}$.
15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$.

2.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}\cdot\ln x$;
4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$;
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot e^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$;
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$;
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{1/x}$;
9. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

3.

1. $\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot \ln x$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot e^{-x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x\cdot \ln x)$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x}{x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cdot \ln x)$.

4.

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x\right)$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;
3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;
4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

5.

1. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$;
2. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;
3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$;
6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$;
7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$;
8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$;
9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

ГЛАВА 5. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Изучение количественной стороны различных явлений природы приводится к установлению и изучению функциональной зависимости между участвующими в данном явлении переменными величинами. Если такую функциональную зависимость можно выразить аналитически, т.е. в виде одной или нескольких формул, то мы получаем возможность исследовать эту функциональную зависимость средствами математического анализа. Например, при исследовании явления полета снаряда в пустоте получается формула, дающая зависимость дальности полета R от угла возвышения α и начальной скорости v_0:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \tag{5.1}$$

где g – ускорение силы тяжести.

Получив эту формулу, мы имеем возможность выяснить, при каком α дальность R будет наибольшей, при каком – наименьшей, каковы должны быть условия, чтобы при увеличении угла α увеличивалась дальность и т.д.

Рассмотрим другой пример. В результате изучения колебания груза на рессоре (вагон, автомобиль) получили формулу, показывающую, как отклонение y груза от положения равновесия зависит от времени t:

$$y = e^{-kt}\left(A\cos\omega t + R\sin\omega t\right). \tag{5.2}$$

Величины k, A, B, ω, входящие в эту формулу, имеют вполне определенное значение для данной колебательной системы (они зависят от упругости рессоры, от величины груза и т.д., но не изменяются с течением времени t) и поэтому рассматриваются нами как постоянные. На основании приведенной формулы можно выяснить, при каких значениях t отклонение y увеличивается с увеличением t, как меняется величина наибольшего отклонения в зависимости от времени, при каких значениях t наблюдаются эти наибольшие отклонения, при каких значениях t получаются наибольшие скорости движения груза и ряд других вопросов.

Все перечисленные вопросы входят в понятие «исследовать поведение функции». Очевидно, выяснить все эти вопросы, вычисляя значения функции в отдельных точках весьма затруднительно. Целью настоящей главы является установление более общих приемов исследования поведения функций.

5.1 Возрастание и убывание функций. Признаки монотонности

Рассмотрим дифференцируемую функцию $y = f(x)$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на некотором интервале, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

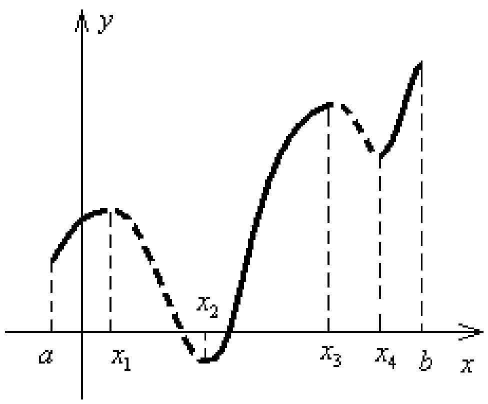


Рис. 5.1. Промежутки монотонности на графике функции

Если $x_1 > x_2$ => $f(x_1) > f(x_2)$ – *строго возрастающая.*

Если $x_1 > x_2$ => $f(x_1) \geq f(x_2)$ – *неубывающая.*

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на некотором интервале, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Если $x_1 > x_2$ => $f(x_1) < f(x_2)$ – *строго убывающая.*

Если $x_1 > x_2$ => $f(x_1) \le f(x_2)$ – *невозрастающая*.

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными* (*строго монотонными*). Интервалы, в которых функция монотонна, называются *интервалами монотонности* (рис. 5.1.).

Теорема (необходимые условия возрастания и убывания функций). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на интервале, то производная этой функции $f'(x)$ не отрицательна (не положительна) на этом интервале.

$f(x) \nearrow$ => $f'(x) \ge 0$, $f(x) \searrow$ => $f'(x) \le 0$ для $\forall\, x$ из этого интервала.

Доказательство: По определению возрастающей на некотором интервале функции имеем:

1) Если $x_2 > x_1$ => $f(x_2) > f(x_1)$,

т.е. для $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$ $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) > 0$.

2) Если $x_2 < x_1$ => $f(x_2) < f(x_1)$,

т.е. для $\Delta x = x_2 - x_1 < 0$ $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) < 0$.

Иными словами, приращения Δx и $\Delta f(x)$ имеют одинаковые знаки, следовательно, отношение $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$. Т.к. функция $f(x)$ дифференцируема, то переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \ge 0$, т.е. $f'(x) \ge 0$.

ч.т.д.

Аналогично рассуждая, можно показать, что в случае убывания функции ее производная $f'(x) \le 0$.

Геометрически утверждение теоремы означает, что касательные к графику возрастающей функции образуют острые углы с положительным направлением оси Ox или в некоторых точках параллельны оси Ox.

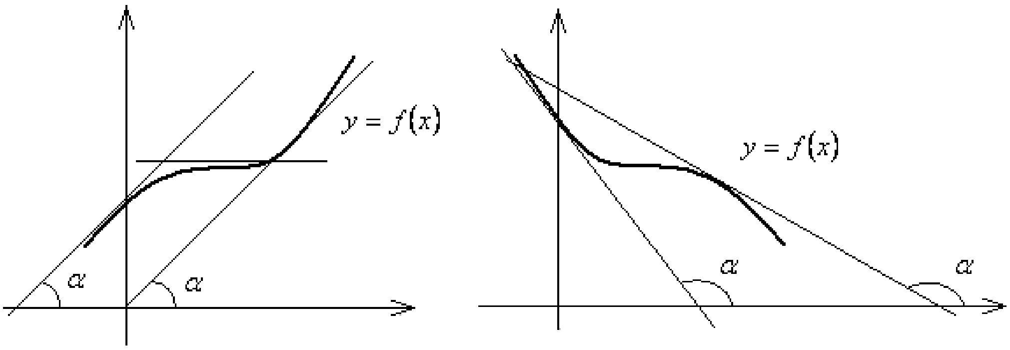


Рис. 5.2. Касательные к функции

$f'(x) = k_{кас} = \operatorname{tg}\alpha \geq 0 \quad => \quad \alpha$ – острый.

Аналогично, касательные к графику убывающей функции образуют с положительным направлением оси Ox тупые углы или параллельны оси Ox.

Обратное утверждение также справедливо.

Теорема (достаточные условия монотонности функции). Если производная функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна) на некотором интервале, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.

$f'(x) > 0 \quad => \quad f(x) \nearrow, \quad f'(x) < 0 \quad => \quad f(x) \searrow$ для $\forall\, x$ из этого интервала.

Доказательство. Пусть $f'(x) > 0$. Возьмем произвольные точки x_1 и x_2 из интервала, такие, что $x_1 < x_2$. Тогда на $[x_1, x_2]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа ($f(x)$ непрерывна и дифференцируема на отрезке), согласно которой имеем:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1), \text{ где } c \in [x_1, x_2].$$

Т.к. $x_2 - x_1 > 0$ и, по условию, $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ => $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Таким образом, функция является возрастающей.

ч.т.д.

Доказательство для случая $f'(x) < 0$ аналогично.

Эти теоремы позволяют довольно просто исследовать функцию на монотонность, определяя знак производной.

Примеры: Исследуем на монотонность функции.

1. $y(x) = 2x + 3$. Найдем $y'(x) = 2 > 0$, следовательно, функция $y(x)$ возрастает на всей числовой прямой.

2. $y(x) = x^2$. Производная $y'(x) = 2x$ => 1) при $x > 0$ функция $y(x)$ возрастает; 2) при $x < 0$ функция $y(x)$ убывает.

3. $y(x) = x^3 - 3x - 4$. $y'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$.

Найдем знаки производной функции, решив неравенство $3(x-1)(x+1) > 0$ методом интервалов.

Следовательно, функция $y(x)$ убывает, если $x \in (-1;1)$, и возрастает, если $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

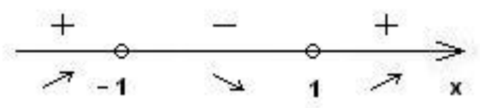


Рис. 5.3. Промежутки монотонности функции

Класс монотонных функций не так уж велик, чаще всего функция на области определения меняет характер монотонности, следовательно, существуют точки, в которых это происходит. Они называются *точками экстремума функции* (от латинского «экстремум» – крайний).

5.2 Точки экстремума. Необходимое условие экстремумов

Точками экстремума функции являются точки *максимума* и *минимума* (от латинских слов «максимум» – наибольший и «минимум» – наименьший).

Определение. Точка x_0 называется *точкой максимума* (т. max) функции $y = f(x)$, если для всех $x \neq x_0$ из некоторой δ-окрестности т. x_0 $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

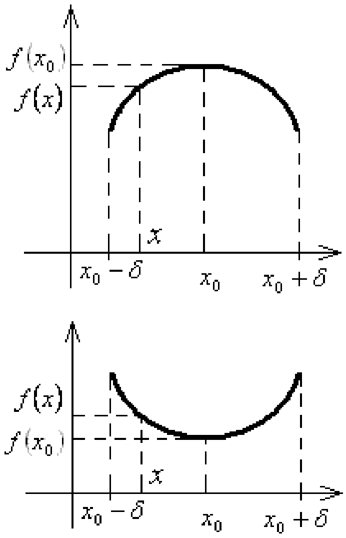


Рис. 5.4. Точки максимума и минимума

Точка x_0 называется *точкой минимума* (т. min) функции $y = f(x)$, если для всех $x \neq x_0$ из некоторой δ-окрестности т. x_0 $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется *max (min) функции*, максимумы и минимумы функции называются *экстремумами* функции.

Из определения точек экстремума следует, что понятие носит локальный характер в том смысле, что неравенства должны выполняться лишь в некоторой окрестности т. x_0, а не на всей области определения и функция может иметь экстремум лишь во внутренних точках области определения. Очевидно, что функция может иметь несколько максимумов и минимумов, причем максимум может оказаться меньше какого-либо минимума (см. рис. 5.1.).

Рассмотрим условия существования точки экстремума функции.

Теорема (необходимое условие существования точки экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю, т.е. x_0 – точка экстремума => $f'(x_0) = 0$

.

Доказательство. Предположим, что x_0 – точка максимума, тогда $f(x) < f(x_0)$ при достаточно малых Δx, т.е. $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) < 0$. В этом случае знак отношения $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ будет определяться знаком Δx: $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$ при $\Delta x < 0$ и $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} < 0$ при $\Delta x > 0$.

По определению производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Если этот предел существует, то он не зависит от того, как Δx стремится к нулю. В нашем случае $f'(x_0) \geq 0$, если Δx отрицательно, и $f'(x_0) \leq 0$, если Δx положительно.

Два последних неравенства совместимы только в случае $f'(x_0) = 0$.

ч.т.д.

Аналогично доказывается теорема для случая минимума функции.

Доказанной теореме соответствует следующий очевидный факт: если в точках максимума и минимума функция имеет производную, то касательная к графику функции в этих точках параллельная оси Ox, т.е. $f'(x_0) = k_{кас} = \operatorname{tg}\alpha = 0$ => $\alpha_{кас} = 0$ (Рис. 5.5.)

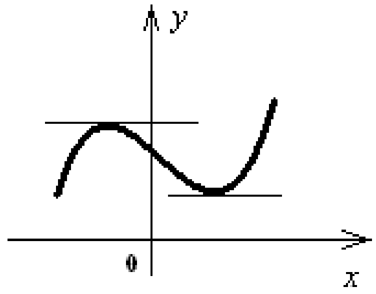


Рис. 5.5. Касательные, параллельные оси *Ox*

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция $y(x)=|x|$ в точке $x_0=0$ не имеет производной, но $x_0=0$ – точка минимума (рис. 5.6.).

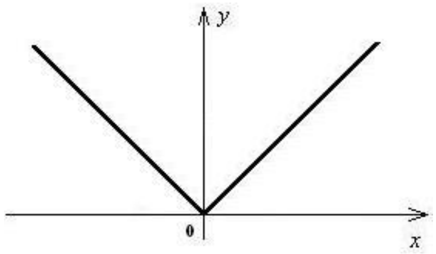


Рис. 5.6. График функции $y(x)=|x|$

Таким образом, непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются *критическими 1^го^ рода* (в них экстремум может как быть так и не быть, т.е. они являются «подозрительными» на экстремум).

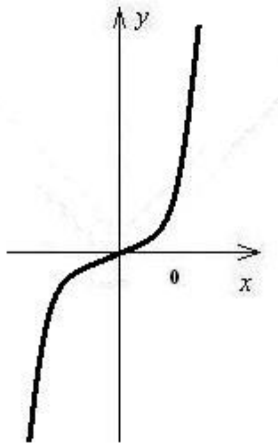


Рис.5.7. График функции $y(x)=x^3$

Обратное утверждение справедливым не является, т.е. равенство производной нулю в точке x_0 не означает, что x_0 является точкой экстремума. Например, для функции $y(x)=x^3$ ее производная $y'(x)=3x^2$ в точке $x_0=0$ равна нулю, но точка $x_0=0$ не является точкой экстремума (см. рис. 5.7.).

Таким образом, необходимое условие существования точки экстремума достаточным не является. Установим достаточное условие существования экстремума.

5.3 Достаточное условие экстремума

Теорема (первое достаточное условие существования экстремума). Если непрерывная функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка максимума, с «–» на «+», то x_0 – точка минимума.

$$\text{Если } x_0 - \text{критическая точка и } \left[\begin{array}{cccc} f' & + & x_0 & - \\ & \nearrow & \bullet & \searrow \\ f' & - & x_0 & + \\ & \searrow & \bullet & \nearrow \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \text{то } x_0 - \text{т. max} \\ \\ \text{то } x_0 - \text{т. min} \end{array}$$

Доказательство. Рассмотрим δ-окрестность т. x_0. Пусть выполняются условия:

$f'(x)>0$ на интервале $(x_0-\delta;x_0)$ $\rightarrow$ $f(x)$ – возрастает, т.е. $\forall x\in(x_0-\delta;x_0)$: $f(x)<f(x_0)$

$f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; x_0+\delta) \to f(x)$ –убывает, т.е. $\forall x \in (x_0; x_0+\delta)$: $f(x) < f(x_0)$

Таким образом, для $x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$ (при $x \neq x_0$), $f(x_0) > f(x)$, а это по определению означает, что x_0 является точкой максимума.

ч.т.д.

Аналогично рассматривается случай перемены знака производной с «–» на «+».

Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 знака не меняет, то в точке x_0 экстремума не существует.

Геометрическая интерпретация доказательства теоремы представлена на рис. 5.8.

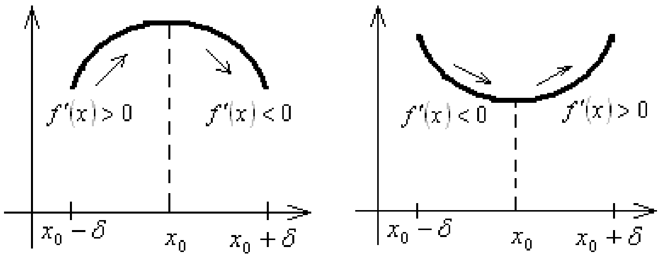


Рис. 5.8. Критические точки

Замечание. Теорема остается справедливой, если функция $y = f(x)$ в самой точке x_0 не дифференцируема, а только непрерывна. Например, функция $y(x) = |x|$ в точке x_0 непрерывна, но не дифференцируема, а имеет минимум.

Таким образом, исследование производной функции $y' = f'(x)$ позволяет во многом изучить поведение самой функции $y = f(x)$. Нетрудно выделить основные моменты этого исследования.

Схема исследования функции на монотонность и экстремумы:

1. Найти область определения функции и точки разрыва.
2. Найти производную функции $f'(x)$.
3. Найти критические точки первого рода:

а) найти корни уравнения $f'(x)=0$, принадлежащие области определения;

б) найти значения аргумента, при которых производная не существует.

4. Установить знаки производной функции при переходе через критические точки и точки экстремума.
5. Вычислить значения функции в точках экстремума.

* Данные последних двух пунктов удобно заносить в таблицу.

Пример. Исследовать на монотонность и экстремумы функцию $y(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.

1) $x \in R$.

2) $y'(x)=x^2-4x+3$.

3) $y'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x+3=0$.

$D=16-12=4, \quad x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}=3;1$.

Замечание. Производную функции для дальнейшего исследования удобно раскладывать на множители:

Т.к. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, то $y'(x)=(x-3)(x-1)$.

Для оформления записи исследования функции можно использовать числовую прямую, на которой отмечаются все критические точки, а также точки, не принадлежащие области определения, при этом все точки, не принадлежащие области определения функции наносятся выколотыми, а принадлежащие – закрашенными. Над числовой осью записаны знаки производной функции на соответствующем интервале, а под числовой осью – поведение функции на этом интервале (возрастание или убывание функции).

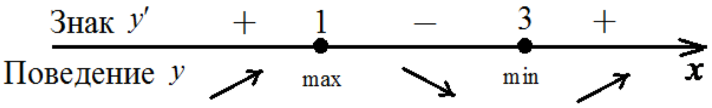


Рис. 5.9. Промежутки монотонности функции

Таким образом, по достаточному условию экстремума функции в точке имеем:

точка $x=1$ – точка локального максимума функции, $y(1)=\frac{1}{3}-2+3+1=2\frac{1}{3}$

точка $x=3$ – точка локального минимума функции, $y(3)=\frac{27}{3}-18+9+1=1$

Функция $y(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ возрастает при $x\in(-\infty;1)$ и $(3;+\infty)$;

Функция $y(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ убывает при $x\in(1;3)$.

5.4 Исследование на экстремум с помощью производных высших порядков

Часто бывает рациональнее исследовать функцию на экстремум с помощью второй производной. Рассмотрим сущность этого метода.

Теорема (второе достаточное условие существования экстремума). Если x_0 – критическая точка первого рода и вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля, то *при* $f''(x_0)<0$ *в точке* x_0 *функция имеет максимум, при* $f''(x_0)>0$ *– минимум.*

Если x_0 – критическая точка и $f''(x_0)<0$ => x_0 – точка максимума ($f''(x_0)>0$ => x_0 – точка минимума)

Доказательство. Рассмотрим теорему для случая $f''(x_0) > 0$.

Т.к. $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - \overbrace{f'(x_0)}^{=0\ (по\ усл.)}}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$, то в достаточно малой окрестности точки x_0 и само выражение $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$, а это возможно лишь в случае, когда знаки $f'(x)$ и $x - x_0$ совпадают.

Следовательно, если $x - x_0 > 0$ (т.е. $x > x_0$), то $f'(x) > 0$,

а если $x - x_0 < 0$ (т.е. $x < x_0$), то $f'(x) < 0$.

Таким образом, при переходе через точку x_0 функция $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», следовательно, по первому достаточному условию существования точки экстремума x_0 – точка минимума.

ч.т.д.

Аналогично доказывается, что если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.

Из этой теоремы *следует правило исследования функции на экстремум с помощью второй производной*:

1. Найти область определения функции и точки разрыва.
2. Найти первую производную $f'(x)$.
3. Найти критические точки первого рода:

а) найти корни уравнения $f'(x) = 0$, принадлежащие области определения;

б) найти значения аргумента, при которых производная не существует.

4. Найти вторую производную $f''(x)$.
5. Найти значение функции $f''(x)$ в критических точках и воспользоваться вторым достаточным условием существования точки экстремума.

Замечание. Если вторая производная в критической точке равна нулю или не существует, то ничего определенного относительно существования точек экстремума сказать нельзя и исследования нужно проводить с помощью первой производной.

Пример. Исследовать на экстремум с помощью второй производной функцию $y(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ (см. предыдущий пример).

1) $x\in R$,

2) $y'(x)=x^2-4x+3$

3) $y'(x)=0$ => $x_{1,2}=3;1$ – критические точки.

3) Найдем $y''(x)=2x-4=2(x-2)$.

4) Вычислим $y''(1)=2(1-2)<0$ => $x=1$ – точка максимума, $y(1)=2\frac{1}{3}$ – максимум функции.

$y''(3)=2(3-2)>0$ => $x=3$ – точка минимума, $y(3)=1$ – минимум функции.

5.5 Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке

Великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894) в работе «Черчение географических карт» писал, что особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения по возможности большей выгоды. С такими задачами приходится иметь дело представителям самых разных специальностей – инженеры-технологи стремятся так организовать производство, чтобы на имеющемся станочном парке сделать как можно больше продукции, конструкторы ломают голову, стремясь сделать наилегчайший прибор на космическом корабле, экономисты стараются так спланировать прикрепление заводов к источникам сырья, чтобы транспортные расходы оказались наименьшими.

Но не только людям приходится решать подобные задачи. Бессознательно с ними справляются и некоторые виды насекомых и других живых существ. Например, форма ячеек пчелиных сот такова, что при заданном объеме на них идет наименьшее количество воска. И хотя пчелы не изучали высшую математику, неумолимый естественный отбор привел к тому, что выжили лишь пчелы, тратившие меньше всего усилий на строительство сот.

Пчелам помогает решать свои задачи инстинкт. Человек же отличается от них тем, что ему на помощь приходит разум. Еще Маркс говорил: «Но и самый плохой архитектор от наилучшей пчелы с самого начала отличается тем, что, прежде чем строить ячейку из воска, он уже построил ее в своей голове». Математикам удалось разработать методы решения задач на наибольшие и наименьшие значения, или, как их еще называют, задач на *оптимизацию* (от латинского «оптимум» – наилучший).

Следует различать два вида задач на оптимизацию. В задачах первого вида улучшение достигается за счет коренных качественных изменений (выбор новых конструктивных решений, переход на новую технологию изготовления данной продукции и т.д.). В задачах же второго рода качественная сторона дела остается неизменной, но меняются количественные показатели, например размеры прибора, соотношение веществ, используемых для химической реакции, начальная скорость ракеты и т.д. Мы будем заниматься лишь задачами второго рода. С математической точки зрения в этих задачах ищутся наибольшие и наименьшие значения функций, зависящих от одного или нескольких переменных.

Например, если надо вытесать из цилиндрического бревна брус наибольшего объема, то задача сводится к тому, чтобы вписать в круг данного радиуса R прямоугольник наибольшей площади (рис. 5.10.). Если обозначить ширину прямоугольника через x, то его высота h равна $\sqrt{4R^2 - x^2}$, а площадь выражается следующей формулой: $S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$. И теперь нам надо найти x, при котором функция $y(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ принимает наибольшее значение.

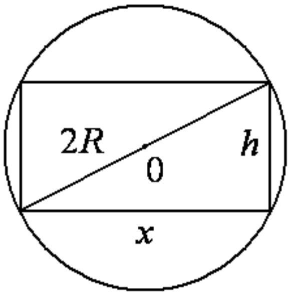


Рис. 5.10. Сечение фигуры

Наибольшим значением функции называется самое большое, а *наименьшим* – самое малое из всех его значений на области определения.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то, как известно, она принимает свои наибольшие и наименьшие значения на этом отрезке. Эти значения функция может принять либо во внутренних точках этого отрезка, и тогда их надо искать среди экстремумов (критических точек), либо на границах отрезка, т.е. в точках a и b (см. рис. 5.1.).

Получаем следующее *правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функций на* $[a;b]$:

1. Найти критические точки первого рода функции на интервале $(a;b)$;

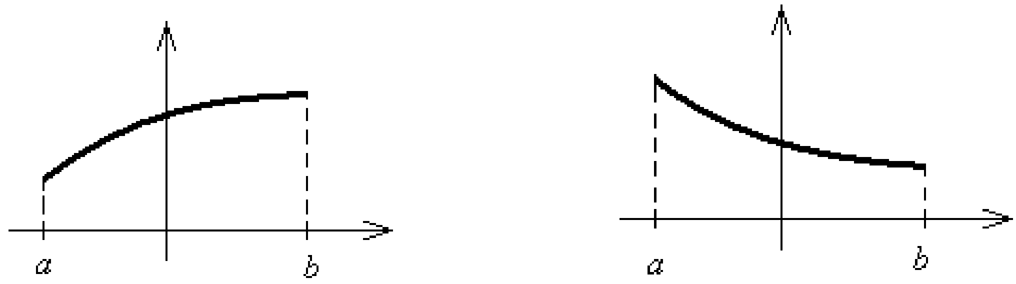
2. Вычислить значения функции в найденных критических точках;

3. Вычислить значения функции на концах отрезка, т.е. в точках $x = a$ и $x = b$;

4. Среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечания.

1) Если функция $y = f(x)$ на $[a;b]$ не имеет критических точек, т.е. возрастает или убывает, то наибольшее и наименьшее значения функция принимает на концах отрезка.



а) б)

Рис. 5.11. Монотонность функций

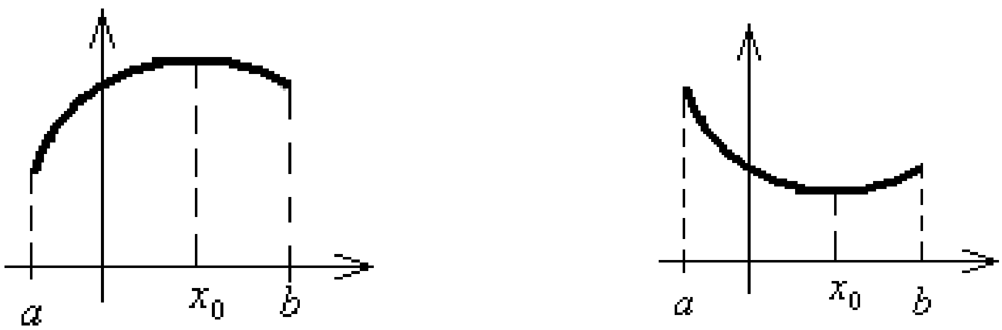
Если $y = f(x)$ возрастает, то $y_{наим}(x) = y(a)$, $y_{наиб}(x) = y(b)$ (Рис. 5.11. а)

Если $y = f(x)$ убывает, то $y_{наим}(x) = y(b)$, $y_{наиб}(x) = y(a)$ (Рис. 5.11. б)

2) Если функция $y = f(x)$ на $[a; b]$ имеет *лишь одну критическую точку* и она является точка максимума (минимума), то в этой точке функция принимает наибольшее (наименьшее) значение ($y_{\max}(x) = y_{наиб}(x)$; $y_{\min}(x) = y_{наим}(x)$).

В этом случае нахождение наибольшего и наименьшего значений функции называется также *задачами на максимум и минимум*.

Практический интерес обычно имеют не сами максимумы или минимумы, а значения аргумента, при которых они достигаются.



$y_{наиб}(x) = y_{\max}(x) = y(x_0)$ $y_{наим}(x) = y_{\min}(x) = y(x_0)$

Рис. 5.12. Наибольшее и наименьшее значение функции

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$y(x)=3x^4+4x^3+1$ на $[-2;1]$.

1) Найдем критические точки первого рода $y'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$.

$x^2(x+1)=0$ => $x_1=0$, $x_2=-1$.

Обе точки принадлежат отрезку $[-2;1]$.

2) Найдем значения функции в критических точках:

$y(0)=1$; $y(-1)=3-4+1=0$;

3) Найдем значения функции в концах отрезка:

$y(-2)=48-32+1=17$; $y(1)=3+4+1=8$.

4) $y_{наиб}=(x)=y(-2)=17$; $y_{наим}=(x)=y(-1)=0$.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции широко применяется при решении многих практических задач математики, физики, химии, экономики и других дисциплин. Примеры таких задач: транспортная задача о перевозке груза с минимальными затратами, задача об организации производственного процесса с целью получения максимальной прибыли и другие задачи, связанные с поиском оптимального решения, приводят к развитию и усовершенствованию методов отыскания наибольших и наименьших значений. Решением таких задач занимается особая ветвь математики – линейное программирование.

При решении таких задач не дается готовой функции для исследования, а ее нужно составить самостоятельно по условию задачи. При этом следует установить, какую величину выбрать за независимую переменную. При исследовании функции, если критическая точка получается одна, исследование на наибольшее и наименьшее значение можно заменить на исследование на максимум и минимум – с помощью второй производной.

Пример. Задача Дидоны. Легенда об основании Карфагена гласит, что когда финикийский корабль пристал к берегу, местные жители согласились продать прибывшим столько земли, сколько можно огородить ее одной бычьей шкурой. Но хитрая финикийская царица Дидона разрезала эту шкуру на ремешки, связала их и огородила полученным ремнем большой участок земли, примыкавший к побережью.

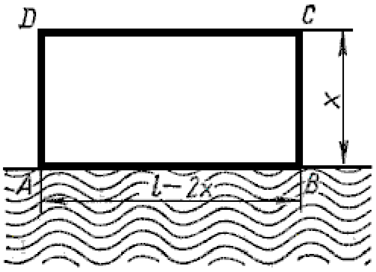


Рис. 5.13. Иллюстрация к задаче Дидона

Решение: Будем для простоты считать, что берег моря был прямолинейным, а участок земли имел форму прямоугольника. Тогда надо найти прямоугольник наибольшей площади, ограниченный с одной стороны морем, а с трех других сторон ремнем заданной длины l.

Выберем в качестве аргумента x длину отрезка BC (рис. 5.13.). Тогда длина отрезка AB равна $l-2x$, и потому площадь прямоугольника равна $x\cdot(l-2x)$. Эта функция определена на отрезке $\left[0;\frac{l}{2}\right]$ и на его концах обращается в нуль, а внутри него положительна. Значит, искомое оптимальное значение x лежит где-то внутри этой области. Производная функции $y(x)=x(l-2x)$ равна $y'(x)=l-4x$ и обращается в нуль лишь при $x=\frac{l}{4}$. Значит, сторона BC должна иметь длину $\frac{l}{4}$, а сторона AB – длину $\frac{l}{2}$, т.е. прямоугольник является половиной квадрата, примыкающей длинной стороной к морю. Если снять условие, что граница участка должна иметь форму прямоугольника, то можно огородить больший участок земли. Для этого он должен иметь форму полукруга.

Пример. **Оптимальная скорость**. Расходы в 1 час на эксплуатацию пожарного катера состоят из расходов на топливо и других расходов (содержание дежурной смены, амортизация и т.д.). Ясно, что расходы на топливо будут тем больше, чем быстрее движется судно, остальные же расходы от скорости движения не зависят. Казалось бы, что чем медленнее движется катер, тем дешевле его эксплуатация. Но это не так, поскольку расходы надо рассчитывать не на 1 час, а на 1 км пути. Решим следующую задачу:

Какой должна быть скорость пожарного катера, чтобы общая сумма расходов на 1 км пути была наименьшей, если расходы на топливо за 1 час пропорциональны квадрату скорости?

Решение: Обозначим через S сумму расходов в час, а через v скорость судна. Тогда расходы на 1 км пути выразятся формулой $\frac{S}{v}$. Но по условию имеем $S = kv^2 + b$, где k – коэффициент пропорциональности, а b – другие расходы (кроме расходов на топливо). Итак, надо найти значение v, при котором функция $y(x) = kv + \frac{b}{v}$ имеет наименьшее значение. Производная этой функции $y'(x) = k - \frac{b}{v^2}$ обращается в нуль, если $v = \sqrt{\frac{b}{k}}$.Таким образом, общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей при скорости $v = \sqrt{\frac{b}{k}}$. Значения коэффициентов b и k определяют из опыта.

Пример 3. Имеется квадратный лист жести (Рис. 5.14.), сторона которого равна 60 см. Вырезая по его углам равные квадраты и загибая оставшуюся часть, нужно изготовить коробку (без крышки). Каковы должны быть размеры вырезаемых квадратов, чтобы коробка имела наибольший объем?

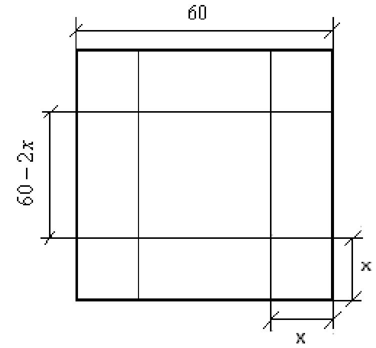


Рис. 5. 14. Квадратный лист жести

Решение: Пусть сторона вырезаемого квадрата равна x, тогда сторона основания коробки, которая должна получиться равна $60 - 2x$.

Объем коробки будет равен объему прямоугольного параллелепипеда со сторонами основания $60 - 2x$ и высотой x (Рис. 5.15.)

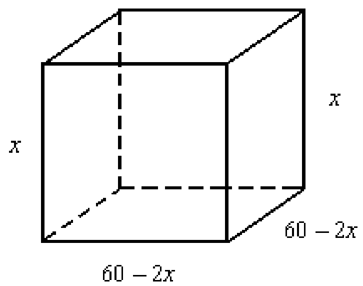


Рис. 5.15. Прямоугольный параллелепипед

Составим функцию $V(x)=(60-2x)^2\cdot x=3600x-240x^2+4x^3$.

Исследуем данную функцию на максимум, если $x\in(0;60)$:

$V'(x)=3600-480x+12x^2=12\cdot(x^2-40x+300)$.

Найдем критические точки первого рода, принадлежащие области определения:

$x^2-40x+300=0 \quad => \quad x_1=10,\ x_2=30$.

Воспользуемся вторым достаточным условием существования точек экстремума:

$V''(x)=24x-480. \qquad V''(10)=240-480=-240<0 \quad => \quad x_1=10$ точка максимума.

$V''(30)=240>0 \quad => \quad x_2=30$ точка минимума.

Следовательно, максимальный объем коробка будет иметь при $x = 10$ см.

Вычислим $V_{наиб} = (60 - 2 \cdot 10)^2 \cdot 10 = 16000$ см^3.

Пример. Балка наибольшей прочности. Основным элементом любой строительной конструкции является балка. Прочность балки зависит от того, какую форму имеет ее поперечное сечение. При этом высота сечения играет значительно большую роль, чем ее ширина. Ведь гораздо труднее согнуть линейку, поставленную на ребро, чем линейку, лежащую плашмя. В сопротивлении материалов доказывают, что прочность балки с прямоугольным сечением пропорциональна ширине балки b и квадрату ее высоты h. Иными словами, прочность такой балки (измеренная в некоторых единицах) равна $k \cdot b \cdot h^2$, где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от длины балки, материала, из которого она сделана, и т.д.

Деревянные балки обычно приходится вытесывать из круглых бревен. В связи с этим возникает следующая задача:

Из бревна, имеющего радиус R, сделать балку наибольшей прочности.

Решение: На рисунке 5.10 изображено поперечное сечение бревна. Разумеется, прочность вырезанной балки является функцией от ее ширины. При этом если взять ширину слишком большой (почти равной диаметру бревна), то получится балка очень малой высоты и прочность ее будет мала. Мала будет прочность балки, если сделать ее и слишком узкой.

Чтобы найти, при каком соотношении длины и ширины прочность будет наибольшей, выразим прочность балки как функцию от ее ширины x. Выше было посчитано, что высота балки, имеющей ширину x, равна $\sqrt{4R^2 - x^2}$. Поэтому прочность такой балки равна $y(x) = kx(4R^2 - x^2)$. При этом x изменяется от 0 до $2R$.

Функция $y(x) = kx(4R^2 - x^2)$ обращается в нуль при $x = 0$ и $x = 2R$ и положительна между этими значениями. Значит, она имеет максимум, лежащий между 0 и $2R$. Но производная этой функции $y'(x) = k(4R^2 - 3x^2)$и обращается в нуль на отрезке $[0; 2R]$ лишь при $x = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$. Это и есть оптимальное значение ширины b балки. Высота h балки такой ширины равна $\frac{2}{3}R\sqrt{6}$ и отношение $\frac{h}{b}$ равно $\sqrt{2} \approx 1{,}4 = \frac{7}{5}$. Именно такое отношение высоты вытесываемой балки к ее ширине предписывается правилами производства строительных работ.

Пример. Нахождение наибольшего отклонения основного пожарного автомобиля от прямого пути.

Траектория движения пожарного автомобиля задана выражением $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 1$, $x \in [-4; 5]$. Необходимо рассчитать наибольшее отклонение от прямого пути.

Решение.

Найдем точки экстремума функции. Для этого производную приравняем к 0.

$y' = x^2 - x - 6$, $\quad x^2 - x - 6 = 0 \quad => \quad x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

Найдем вторую производную:

$y'' = 2x - 1$,

$y''(-2) = -5 < 0 \quad =>$ в точке $x = -2$ функция имеет максимум,

$$y_{\max} = y(-2) = -\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 12 + 1 = 8\frac{1}{3}.$$

$y''(3) = 5 > 0 \quad =>$ в точке $x = 3$ функция имеет минимум,

$$y_{\min} = y(3) = \frac{27}{3} - \frac{9}{2} - 18 + 1 = -12{,}5.$$

Найдем значение функции на концах отрезка:

$$y(-4) = -\frac{64}{3} - \frac{16}{2} + 24 + 1 = -4\frac{1}{3}.$$

$$y(5) = \frac{125}{3} - \frac{25}{2} - 30 + 1 = \frac{1}{6}.$$

Итак, наибольшее отклонение (удаление от оси OX) происходит в точке $x=3$, это отклонение составляет 12,5 ед.

Ответ: 12,5 ед.

5.6 Понятие выпуклости графика функции, точек перегиба

Чтобы исследовать более подробно особенности поведения графика функции, введем понятия выпуклости графика функции и точек перегиба.

На рис. 5.16 изображены графики функций, любая из которых является возрастающей на $[a;b]$, однако хорошо видно различие в их поведении. В случае а) график обращен выпуклостью вниз; б) – выпуклый вверх; в) на $(a;c)$ обращен выпуклостью вверх, на $(c;b)$ – вниз. С геометрической точки зрения смысл выражения «обращен выпуклостью вверх или вниз» вполне понятен. Придадим этим выражениям точный математический смысл и дадим критерий для выяснения направления выпуклости графика функции.

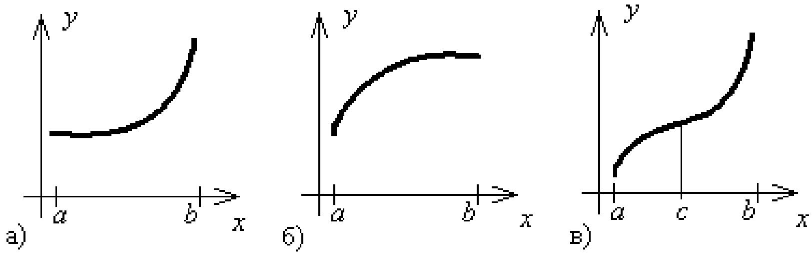
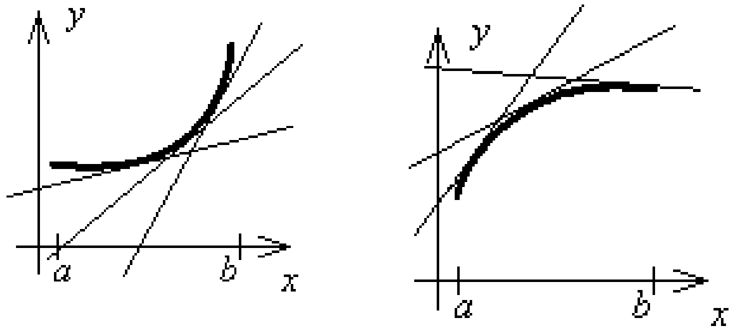


Рис. 5.16. Графики выпуклых функций

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$. Тогда существует касательная к графику функции $y=f(x)$ в любой точке интервала, причем она не параллельна оси Oy, т.к. угловой коэффициент $k_{кас}=f'(x)$ существует и конечен (т.е. α не может быть равен 90º, т.к. $\mathrm{tg}\,\alpha$ определен).



а) **б)**

Рис. 5.17. График выпуклых функций и их касательные

Определение. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вниз* на интервале $(a;b)$, если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале. (Рис. 5.17.а)

График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх* на интервале $(a;b)$, если он расположен ниже любой ее касательной этом интервале. (Рис. 5.17.б)

Кривая может быть в одной своей части выпукла вверх, в другой – вниз (например, для синусоиды точка ноль – граница между ними). (Рис. 5.18)

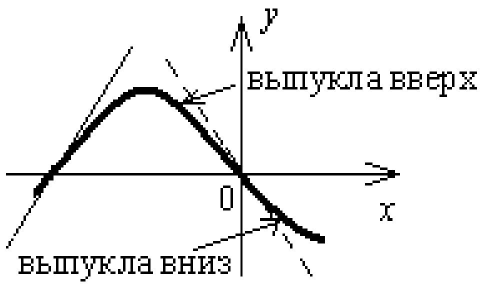


Рис. 5.18. График выпуклой функции

Определение. Точка, в которой кривая меняет направление выпуклости, называется *точкой перегиба*.

Касательная, проведенная к кривой в этой точке, является общей для её выпуклой и вогнутой частей, в то же время она пересекает график функции. С одной стороны от этой точки график лежит под касательной, а с другой – над нею, т.е. в окрестности точки перегиба график функции геометрически переходит с одной стороны касательной на другую, т.е. «перегибается» через нее. Отсюда и произошло название «точка перегиба».

Интервалы, на которых график функции является выпуклым вверх или вниз, называются *интервалами выпуклости*.

5.7 Необходимое и достаточное условия выпуклости графика функции

Направление выпуклости кривой является важной характеристикой её формы. Установим признаки, по которым можно судить о направлении выпуклости графика функции на интервале.

Рассмотрим кривую $y = f(x)$, обращенную выпуклостью вверх (Рис. 5.19.). Из рис. 5.17.б видно, что с возрастанием аргумента x величина угла α, образованного касательной с положительным направлением оси Ox, убывает, принимая значения от $\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{\pi}{2}$, т.е. $k = f'(x) = \mathrm{tg}\,\alpha$ также убывает (принимая значения от $+\infty$ до $-\infty$). Известно, что если функция убывает, то её производная меньше либо равна нулю, т.е. для убывающей функции $f'(x)$ ее производная $f''(x) \le 0$. Таким образом, если график функции $y = f(x)$является выпуклым вверх, то $f''(x) \le 0$.

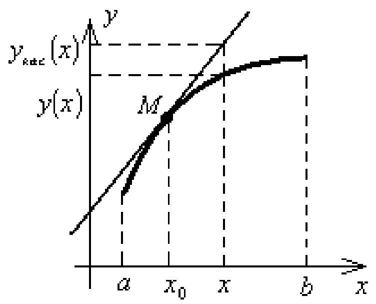


Рис. 5.19. Выпуклость вверх

Из (рис. 5.17. а.) аналогичным образом заключаем, что для выпуклого вниз графика функции производная функции $f'(x)$ возрастает, следовательно, график функции является выпуклым вниз, если $f''(x) \ge 0$.

Необходимое условие выпуклости графика функции:

$$\text{Функция } y = f(x) \ \cap \quad => \quad f''(x) \le 0$$
$$\text{Функция } y = f(x) \ \cup \quad => \quad f''(x) \ge 0$$

Имеют место и обратные утверждения.

Теорема (*достаточное условие выпуклости графика функции)*. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$ имеет отрицательную вторую производную, то график функции в этом интервале является выпуклым вверх; если же функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$ имеет положительную вторую производную, то график функции является выпуклым вниз.

$$f''(x) \le 0 \quad => \quad y = f(x) \ \cap$$
$$f''(x) \ge 0 \quad => \quad y = f(x) \ \cup$$

Доказательство. Пусть $f''(x) < 0$ для любого $x \in (a;b)$. Возьмем на графике функции произвольную точку M с абсциссой $x_0 \in (a;b)$ и проведем через точку M касательную. Покажем, что график функции расположен ниже этой касательной (т.е. покажем, что для любого $x \in (a;b)$ $y(x) < y_{кас}(x)$).

Известно, что уравнение касательной имеет вид: $y_{кас}(x) = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Тогда рассмотрим разность $y(x) - y_{кас}(x) = y(x) - y(x_0) - y'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

По теореме Лагранжа $y(x) - y(x_0) = y'(c) \cdot (x - x_0)$, где $c \in (x_0; x)$, следовательно, $y(x) - y_{кас}(x) = y'(c) \cdot (x - x_0) - y'(x_0) \cdot (x - x_0) = (y'(c) - y'(x_0)) \cdot (x - x_0)$.

Разность $y'(c)-y'(x_0)$ снова преобразуем по формуле Лагранжа:

$y'(c)-y'(x_0)=y''(c_1)\cdot(c-x_0)$, где $c_1\in(x_0;c)$.

Получаем, что $y(x)-y_{кас}(x)=y''(c_1)\cdot(c-x_0)\cdot(x-x_0)$.

Исследуем это равенство. 1) Если $x>x_0$, то $x-x_0>0$, $c-x_0>0$ и, по условию, $y''(c_1)<0$ => $y(x)-y_{кас}(x)<0$, т.е. $y(x)<y_{кас}(x)$;

2) Если $x<x_0$, то $x-x_0<0$, $c-x_0<0$ и, по условию, $y''(c_1)<0$ =>

$y(x)-y_{кас}(x)<0$, т.е. $y(x)<y_{кас}(x)$.

Таким образом, во всех точках интервала $(a;b)$ выполняется неравенство $y(x)<y_{кас}(x)$, следовательно, по определению, график функции является выпуклым вверх.

ч.т.д.

Аналогично доказывается, что при $f''(x)>0$ график функции является выпуклым вниз.

Итак, исследование на выпуклость графика функции $y=f(x)$ означает определение интервалов из области определения, в которых $f''(x)$ больше или меньше нуля.

Пример. Исследовать график функции $y=x^3$ на выпуклость.

Найдем вторую производную функции: $y'=3x^2$, $y''=6x$. Если $y''>0$ => $6x>0$, т.е. $x>0$, то график функции является выпуклым вниз, а если $x<0$, то график функции является выпуклым вверх.

5.8 Необходимое и достаточное условия существования точек перегиба

Выясним условия существования точки перегиба.

Теорема (*необходимое условие существования точки перегиба*): Пусть функция $y = f(x)$ на интервале $(a;b)$ имеет непрерывную производную второго порядка. Если точка x_0 является точкой перегиба графика этой функции, то вторая производная функции в этой точке равна нулю.

$$x_0 \text{ – точка перегиба } \Rightarrow \quad f''(x_0) = 0\,.$$

Доказательство. Предположим обратное: $f''(x_0) \neq 0$, следовательно, т.к. вторая производная – непрерывная функция, то по теореме об устойчивости знака, существует окрестность точки x_0, в которой $f''(x)$ будет больше либо меньше нуля и, следовательно, имеет определенное направление выпуклости, а это противоречит наличию точки перегиба в x_0. Следовательно, предположение не верно, и $f''(x_0)$ должна быть равна нулю.

ч.т.д.

Из этой теоремы следует, что точка перегиба существует только в том случае, если вторая производная в этой точке равна нулю. Точками перегиба также могут оказаться точки, в которых производная не существует. Точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует называются *критическими точками $2^{го}$ рода*.

Утверждение, обратное сформулированному в теореме, не является справедливым.

Например, график функции $y(x)=x^4$ не имеет перегиба в точке $x_0=0$, хотя $y''(0)=0$ (рис. 5.20.).

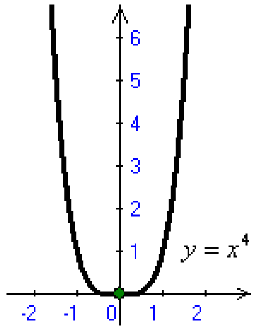


Рис. 5.20. График функции $y(x)=x^4$

Т.е. условие, что x_0 – критическая точка второго рода, не является достаточным для существования точки перегиба.

Теорема (*достаточное условие существования точек перегиба).* Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка x_0 является точкой перегиба.

x_0 – критическая точка 2го рода и $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0 => x_0 – точка перегиба

Доказательство. Из того, что $f''(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет различные знаки, по предыдущей теореме следует, что направление выпуклости графика слева и справа от точки x_0 является различным, а это означает наличие точки перегиба.

ч.т.д.

Итак, вопрос о направлении выпуклости и точках перегиба графика функции исследуется с помощью второй производной.

Схема исследования функции на выпуклость и точки перегиба:

1. Найти область определения функции и точки разрыва.
2. Найти вторую производную исследуемой функции.
3. Найти критические точки второго рода:
   а) найти корни уравнения $f''(x) = 0$, принадлежащие области определения;
   б) найти значения аргумента, при которых вторая производная не существует.
4. Установить знаки второй производной функции при переходе через критические точки второго рода и точки перегиба
5. Найти ординаты точек перегиба.

* Данные последних двух пунктов удобно заносить в таблицу.

Пример. Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.

Решение:

1) $x \in R$;

2) $y'(x) = 3x^2 - 6x$; $y''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

3) $6(x-1) = 0$ => $x = 1$ – критическая точка.

4, 5)

При исследовании функции на выпуклость и точки перегиба также удобно применять числовую прямую. При этом над прямой наносятся знаки второй производной функции, а под прямой – поведение функции (выпуклость функции вверх или вниз).

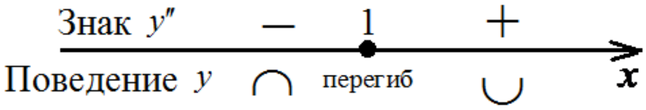


Рис. 5.21. Промежутки выпуклости функции и точка перегиба

Таким образом, по достаточному условию существования точек перегиба, имеем:

точка $x=1$ – точка перегиба функции, $y(1)=1-3+5=3$.

Функция $y(x)=x^3-3x^2+5$ выпукла вверх при $x\in(-\infty;1)$;

функция $y(x)=x^3-3x^2+5$ выпукла вниз при $x\in(1;+\infty)$.

5.9 Асимптоты графика функции

Построение графика функции значительно облегчается, если знать его *асимптоту* – это прямая, к которой исследуемая кривая приближается неограниченно при стремлении переменной x к бесконечности.

Определение. *Асимптотой* кривой $y=f(x)$ называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

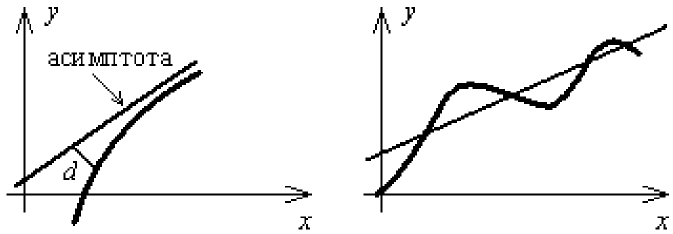


Рис. 5.22. Наклонная асимптота

Асимптоты могут быть *вертикальными* (т.е. параллельными оси Oy), *наклонными* и *горизонтальными* (т.е. параллельными оси Ox).

Определение. Прямая $x=a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\infty$.

Действительно, в этом случае расстояние от кривой $y=f(x)$ до прямой $x=a$ при $x\to a$ равно $d=|x-a|\to 0$.

Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот (Рис. 5.23.) нужно найти такие значения $x=a$, при приближении к которым функция $y=f(x)$ стремится к бесконечности (неограниченно возрастает по модулю). Обычно это точки разрыва 2$^{\text{го}}$ рода (в них как раз $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\infty$).

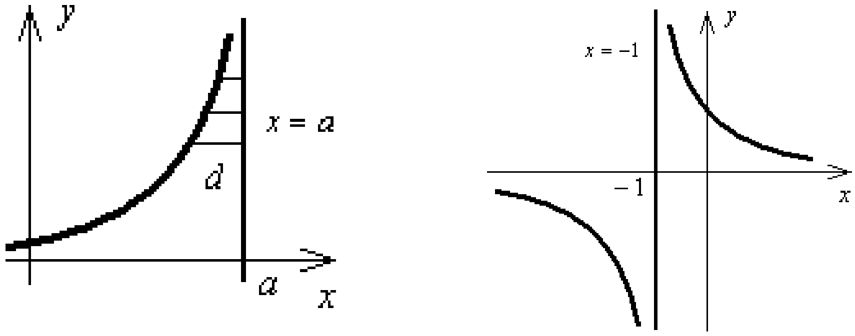


Рис. 5.23. Вертикальная асимптота

Например, функция $y=\dfrac{2}{x+1}$ имеет вертикальную асимптоту $x=-1$, т.к. $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{2}{x+1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{2}{x+1}=-\infty$.

Уравнение *наклонной асимптоты* (Рис. 5.24.) будем искать в виде $y=kx+b$. Определим коэффициенты k и b.

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка кривой $y=f(x)$. Воспользуемся формулой расстояния от точки до прямой $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, где (x_0,y_0) – координаты данной точки, $Ax+By+C=0$ – уравнение прямой.

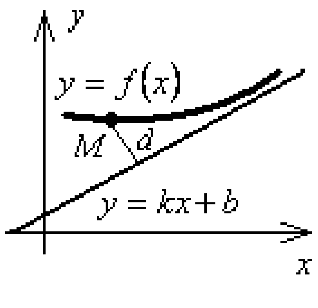


Рис. 5.24. Наклонная асимптота

В нашем случае, $kx - y + b = 0$ – уравнение прямой, (x, y) – координаты точки M, тогда $d = \dfrac{|kx - y + b|}{\sqrt{k^2 + 1}}$. Условие $d \to 0$ (по определению асимптоты) будет выполняться лишь тогда, когда числитель дроби стремится к нулю (т.к. знаменатель является константой): $\lim\limits_{x\to\infty}(kx - y + b) = 0$ => $kx - y + b = \alpha$ (т.е. α – бесконечно малая величина: $\alpha \to 0$ при $x \to \infty$). Следовательно, $y = kx + b - \alpha$. (*)

Поделим обе части равенства (*) на x: $\dfrac{y}{x} = k + \dfrac{b}{x} - \dfrac{\alpha}{x}$ и вычислим пределы левой и правой частей:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(k + \dfrac{b}{x} - \dfrac{\alpha}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} k + 0 - 0 = k$, т.е. $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y(x)}{x}$.

Из условия (*) выразим $b = y - kx + \alpha$, следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} b = \lim\limits_{x\to\infty}(y - kx + \alpha)$, а $b = \lim\limits_{x\to\infty}(y(x) - kx)$.

Итак, если существует *наклонная асимптота* $y = kx + b$, то коэффициенты k и b вычисляются по формулам:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty}(y(x) - kx)$$

Верно и обратное утверждение: если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y(x)}{x}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(y(x) - kx)$, то прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой.

Если хотя бы один из пределов не существует или равен бесконечности, то кривая $y = f(x)$ наклонной асимптоты не имеет.

В частности, если $k = 0$ ($\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y(x)}{x} = 0$), то $b = \lim\limits_{x\to\infty} y(x)$, следовательно, $y = b$ – уравнение *горизонтальной асимптоты*.

Замечание. Асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут быть различными. Поэтому при нахождении пределов следует отдельно рассматривать случай, когда $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x}$.

1) $x=0$ – точка разрыва $2^{\text{го}}$ рода, т.к. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x^2+2x-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\underbrace{x}_{=0}+2-\dfrac{3}{x}\right)=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{x^2+2x-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0-0}\left(\underbrace{x}_{=0}+2-\dfrac{3}{x}\right)=+\infty$ => $x=0$ – вертикальная асимптота.

2) Найдем наклонную асимптоту $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=1+0-0=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x-3}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+2-\frac{3}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{3}{\text{x}}\right)=2-0=2\cdot$$

Таким образом, $y=x+2$ – наклонная асимптота при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

5.10 Общая схема исследования функций и построения графиков

Исследование функции целесообразно вести в определенной последовательности:

1. Найти область определения и точки разрыва функции.
2. Найти точки пересечения графика с осями координат:
   а) с осью Oy из условия $x=0$;
   б) с осью Ox из условия $y=0$ (если возможно решить уравнение $y=0$).
3. Найти интервалы знакопостоянства функции, т.е. промежутки, на которых $f(x)>0$ и $f(x)<0$ (если решение неравенств не вызывает затруднений).
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида:
   а) функция является четной, если $y(-x)=y(x)$ (график четной функции симметричен относительно оси Oy).
   б) функция является нечетной, если $y(-x)=-y(x)$ (график нечетной функции симметричен относительно начала координат).

в) функция общего вида, если $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$.

5. Найти асимптоты графика функции.
6. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы (см. схему исследования п. 5.3).
7. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции (см. схему исследования п. 5.8).
8. Построить график функции.

Итак, с помощью производной можно достаточно подробно исследовать свойства функций и строить их графики.

Пример. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = \frac{x^2+1}{x}$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

Решение:

1. *Область определения*: $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, $x=0$ – точка разрыва.

2. Точек пересечения с осью Oy нет, т.к. $x \neq 0$.

Найдем точки пересечения с осью Ox: $\frac{x^2+1}{x} = 0$, т.к. $x^2+1 \neq 0$, то пересечений с осью Ox нет.

3. *Промежутки знакопостоянства*: $\frac{x^2+1}{x} > 0$, если $x > 0$; $\frac{x^2+1}{x} < 0$, если $x < 0$ (т.к. $x^2+1 > 0$).

4. Найдем $y(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -y(x)$ => функция нечетная, график функции симметричен относительно начала координат.

5. *Асимптоты*:

1) $x=0$ – точка разрыва. Найдем $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x^2+1}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{x^2+1}{x}=-\infty$ => $x=0$ – вертикальная асимптота.

2) $y=kx+b$ – наклонная асимптота.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1;\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0.$$

$y=x$ – наклонная асимптота.

6. *Исследование функции на монотонность и экстремумы*:

$$y'=\frac{2x\cdot x-\left(x^2+1\right)}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2};$$

$$\frac{x^2-1}{x^2}=0 \quad => \quad x^2-1=0.$$

Критические точки: $x=\pm 1$.

Точка $x=0$ не принадлежит области определения.

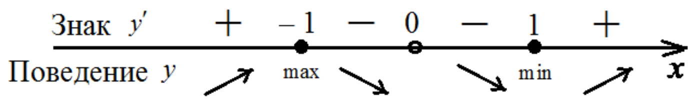


Рис. 5.25. Промежутки монотонности функции

Таким образом, по достаточному условию экстремума функции в точке имеем:

точка $x=-1$ – точка локального максимума функции, $y(-1)=-2$

точка $x=1$ – точка локального минимума функции, $y(1)=2$

Функция $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ возрастает при $x\in(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$;

функция $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ убывает при $x\in(-1;0)$ и $(0;1)$.

7. *Исследование графика функции на выпуклость и точки перегиба*:

$$y'' = \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)' = \frac{2x\cdot x^2-(x^2-1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3-2x^3+2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}.$$

$$\frac{2}{x^3} \neq 0, \quad x \neq 0$$

$y'' \neq 0$, следовательно,

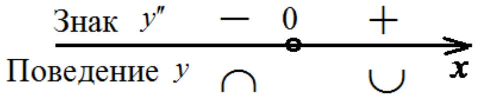


Рис. 5.26. Промежутки выпуклости функции и точки перегиба

Таким образом, точки перегиба функции $y = \frac{x^2+1}{x}$ отсутствуют.

Функция $y = \frac{x^2+1}{x}$ выпукла вверх при $x \in (-\infty;0)$;

функция $y = \frac{x^2+1}{x}$ выпукла вниз при $x \in (0;+\infty)$.

Построим график функции:

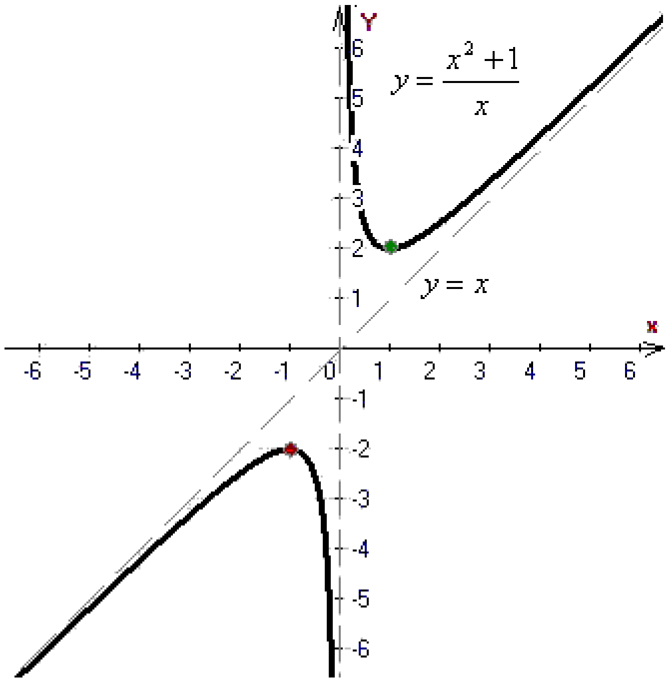


Рис. 5.27. График функции $y = \frac{x^2+1}{x}$

Пример. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

Решение:

1. *Область определения*: $D(y)=R$;

2. *Точки пересечения с осями*:

График функции проходит через начало координат, т.к. при $x=0$ $y=0$.

3. *Промежутки знакопостоянства*:

$\dfrac{x^3}{x^2+1}>0$, т.к. $x^2+1>0$ => $x>0$;

$\dfrac{x^3}{x^2+1}<0$, т.к. $x^2+1>0$ => $x<0$.

4. Найдем $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1}=\dfrac{-x^3}{x^2+1}=-y(x)$ => функция является нечетной, график функции симметричен относительно начала координат.

5. *Асимптоты*:

1) Вертикальных асимптот нет, т.к. нет точек разрыва функции.

2) Наклонные: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$;

$$b=\lim_{x\to\pm}(y(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=-\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$$

=> $y=x$ – наклонная асимптота.

6. *Исследование функции на монотонность и экстремумы*:

$y'=\dfrac{3x^2(x^2+1)-2x\cdot x^3}{(x^2+1)^2}=\dfrac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}>0$, т.е. функция возрастает на всей области определения.

$y'=0$ => $x^2(x^2+3)=0$ => $x=0$ – критическая точка.

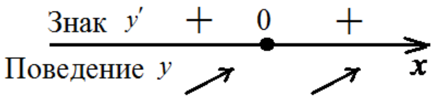


Рис. 5.28. Промежутки монотонности функции

Таким образом, функция $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ не имеет точек экстремума и возрастает на всей числовой прямой.

Замечание: В критической точке $x=0$, не являющейся экстремумом, производная равна нулю, следовательно, касательная к графику функции в этой точке должна быть параллельная оси Ox (т.к. $y'=k_{кас}=\operatorname{tg}\alpha$ в этой точке равна нулю, то $\alpha_{кас}=0$).

7. *Исследование графика функции на выпуклость и точки перегиба*:

$$y''=\frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{2x(x^2+1)\big((2x^2+3)(x^2+1)-2(x^3+3x)\big)}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{2x(x^2+1)(2x^4+3x^2+2x^2+3-2x^3-6x)}{(x^2+1)^4}=\frac{4x^5+4x^3+6x^3+6x-4x^5-12x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{-2x^3+6x}{(x^2+1)^3}.$$

$y''=0 \quad => \quad 2x\left(3-x^2\right)=0 \quad => \quad x=0, \quad x=\pm\sqrt{3}$ – критические точки.

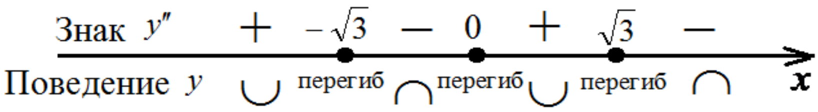


Рис. 5.29. Промежутки выпуклости функции и точки перегиба

Таким образом, по достаточному условию существования точек перегиба, имеем:

точка $x=-\sqrt{3}$ – точка перегиба функции, $y\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}\approx -1{,}3$;

точка $x=0$ – точка перегиба функции, $y(0)=0$;

точка $x=\sqrt{3}$ – точка перегиба функции, $y\left(\sqrt{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}\approx 1{,}3$.

Функция $y=\frac{x^3}{x^2+1}$ выпукла вверх при $x\in\left(-\sqrt{3};0\right)$ и $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$;

функция $y=\frac{x^3}{x^2+1}$ выпукла вниз при $x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ и $\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Построим график функции:

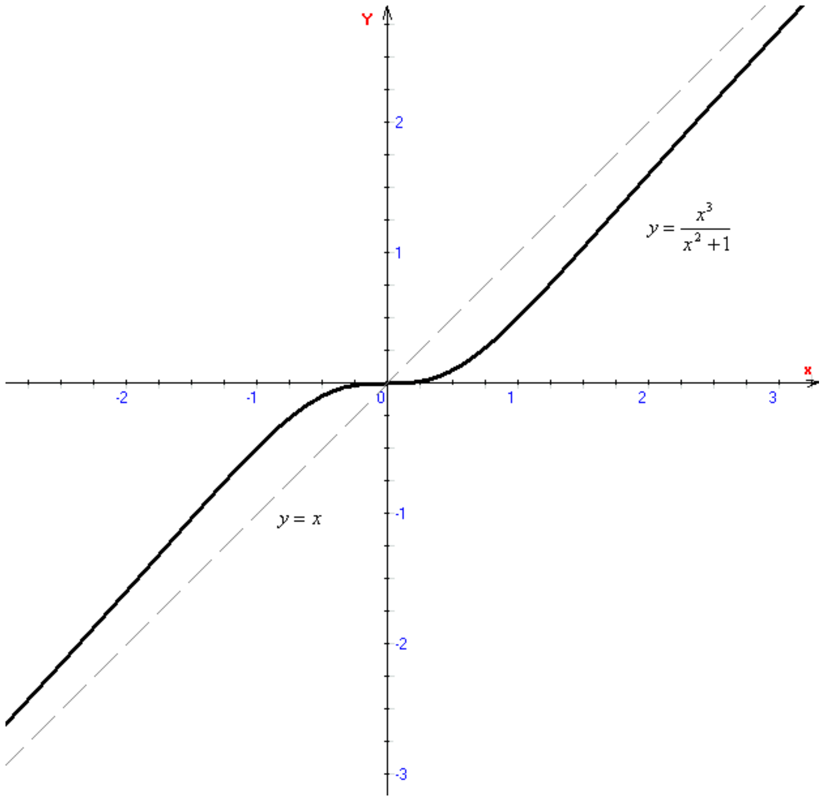


Рис. 5.30. График функции $y=\frac{x^3}{x^2+1}$

Пример. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=\frac{x}{(x-1)^2}$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

Решение:

1. *Область определения*: $D(y): x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$, $x = 1$ – точка разрыва.

2. *Точки пересечения с осями координат*:

График функции проходит через начало координат, т.к. при $x = 0$ $y = 0$.

3. *Промежутки знакопостоянства*:

$y > 0$, если $x > 0$; $y < 0$, если $x < 0$, т.к. $(x-1)^2 > 0$.

4. Найдем $y(-x) = \dfrac{-x}{(-x-1)^2} \neq y(x) \neq -y(x)$ => функция не является ни четной, ни нечетной (общего вида).

5. *Асимптоты*:

Вертикальная асимптота: $x = 1$, т.к. $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} \dfrac{x}{(x-1)^2} = \infty$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0;\ b = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1-0+0} = 0 \quad =>$$

$y = 0$ – горизонтальная асимптота.

6. *Исследование функции на монотонность и экстремумы*:

$$y' = \frac{(x-1)^2 - 2x(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x-1-2x}{(x-1)^3} = \frac{-x-1}{(x-1)^3};$$

найдем критические точки функции: $y' = 0$;

$-x-1 = 0$ => $x = -1$.

Точка $x = 1$ не принадлежит области определения.

Найдем промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремума функции:

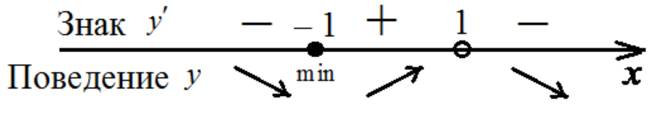


Рис. 5.31. Промежутки монотонности функции

Таким образом, по достаточному условию экстремума функции в точке имеем:

точка $x=-1$ – точка локального минимума функции, $y(-1)=-\frac{1}{4}$.

Функция $y=\frac{x}{(x-1)^2}$ возрастает при $x\in(-1;1)$;

функция $y=\frac{x}{(x-1)^2}$ убывает при $x\in(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$.

7. *Исследование графика функции на выпуклость и точки перегиба*:

$$y''=\frac{-(x-1)^3+(x+1)\cdot 3\cdot (x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{(x-1)^2(-x+1+3x+3)}{(x-1)^6}=\frac{-x+1+3x+3}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{2x+4}{(x-1)^4}=\frac{2(x+2)}{(x-1)^4}.$$

Найдем критические точки второго рода функции:

а) $x=1$, т.к. вторая производная в этой точке не существует

б) решим уравнение $\frac{2(x+2)}{(x-1)^4}=0$ => $x=-2$ – критическая точка.

Точка $x=1$ не принадлежит области определения.

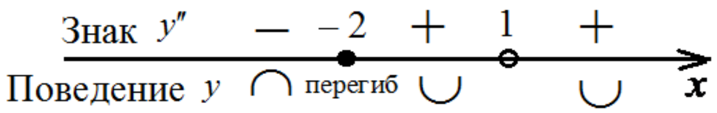


Рис. 5.32. Промежутки выпуклости функции и точки перегиба

Таким образом, по достаточному условию существования точек перегиба, имеем:

точка $x=-2$ – точка перегиба функции, $y(-2)=-\frac{2}{9}$.

Функция $y=\frac{x}{(x-1)^2}$ выпукла вверх при $x\in(-\infty;-2)$;

функция $y=\frac{x}{(x-1)^2}$ выпукла вниз при $x\in(-2;-1)$ и $(1;+\infty)$;

Построим график функции:

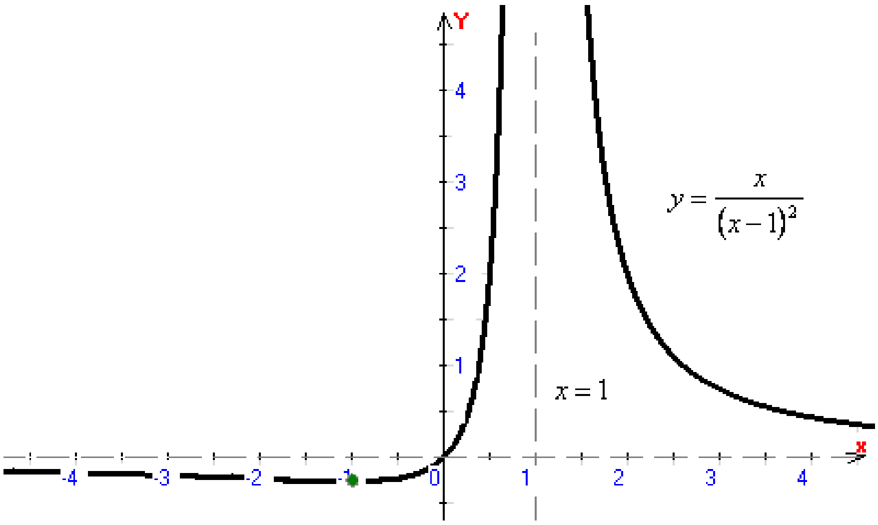


Рис. 5.33. График функции $y = \frac{x}{(x-1)^2}$

5.11 Задания для самостоятельной подготовки

1. Исследовать функции на монотонность и экстремумы:

1) $y=2+8x$;

2) $y=-x^5$;

3) $y=x(1+\sqrt{x})$;

4) $y=x^3-2x^2+x$;

5) $y=(x-5)\cdot e^x$;

6) $y=\frac{x}{3}-\sqrt[3]{x^2}$;

7) $y=x^4-2x^2-3$;

8) $y=x-2\sin x$, если $x\in[0;2\pi]$;

9) $y=3x^5-5x^3+2$;

10) $y=(x-2)^5$;

11) $y=x^3+3x^2+9x-6$;

12) $y=(2x+1)\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2}$;

13) $y=1-\sqrt[5]{(x-2)^4}$.

2. Исследовать функции на экстремум (по 2-му достаточному условию):

1) $y=2x^2-4x+5$;

2) $y=x^3-9x^2+24x-12$;

3) $y=x^6$;

4) $y=x^2\cdot e^{-x}$;

5) $y=\sin x+\cos x$ на $(0;2\pi)$;

6) $y=4x^3$.

3. Задачи на максимум и минимум. Наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции на отрезке

1) Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

1. $y=x^3-1{,}5x^2-6x+1$ на отрезке $[-2;0]$;
2. $y=2x^2+\frac{108}{x}-59$ на отрезке $[2{,}4]$;
3. $y=\sqrt[3]{x}(x-2)$ на отрезке $[-1;1]$;
4. $y=2\sqrt{x}-x$ на отрезке $[0{,}4]$;
5. $y=x^5-5x^4+5x^3+1$ на отрезке $[-1;2]$;
6. $y=-\frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$ на отрезке $[-5{,}1]$;

7. $y=-\frac{x^2}{2}+2x+\frac{8}{x-2}+5$ на отрезке $[-2,1]$;

8. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$ на отрезке $[1,5]$;

9. $y=\frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$ на отрезке $[-3,3]$;

10. $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}$ на отрезке $[-2,5]$.

2) Представьте 100 в виде суммы двух чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

3) Специальный пожарный автомобиль движется прямолинейно по закону $S(t)=-t^3+3t^2+9t+3$. Найдите максимальную скорость движения.

4) Требуется выбрать силосную яму объемом 32 м^3, имеющую квадратное дно, чтобы на облицовку ее дна и стен пошло наименьшее количество материала. Каковы должны быть размеры ямы?

5) Требуется огородить проволочной сеткой длиной 60 м прямоугольный участок, прилегающий к стене. Найдите размеры участка, при которых его площадь будет наибольшей.

4. Исследование функций и построение графиков функций

1) Исследовать график функции на выпуклость и точки перегиба:

1. $y=3x^5-5x^4+4$;

2. $y=3-\sqrt[5]{(x+2)^7}$;

3. $y=\frac{x^2+1}{x}$;

4. $y=\frac{1}{(x+1)^3}$.

2) Найти вертикальные асимптоты графика функции $y=\frac{2}{x^2-1}$.

3) Найти горизонтальные асимптоты графика функции $y=\frac{x}{1-x^2}$.

4) Найти асимптоты кривой:

1. $y=\frac{x^2+1}{x}$;

2. $y=x\cdot e^x$;

3. $y=\ln(4-x^2)$.

5) Исследуйте функцию и постройте ее график:

1. $y=\frac{x^2+20}{x-4}$;

2. $y=\frac{5(x-2)}{x^2}$;

3. $y=-\frac{x^3}{(x+1)^2}$;

4. $y=\frac{1-x^3}{x^2}$;

5. $y=\frac{4x^3-x^4}{5}$;

6. $y=\frac{x^3}{1-x^2}$;

7. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}$;

8. $y=\sin^2 x+\cos^2 x$;

9. $y=\ln\frac{x}{x-1}$;

10. $y=x+e^{-x}$.

11. $y=2-3x^2-x^3$

12. $y=\frac{x^3+3x^2}{4}-5$

13. $y=(2x+1)^2(2x-1)^2$

14. $y=\frac{x(12-x^2)}{8}$

15. $y=16x^3-36x^2+24x-9$

16. $y=-\frac{(x+1)^2(x-3)^2}{16}$

17. $y=1-\sqrt[3]{x^2+2x}$

18. $y=\frac{6\sqrt[3]{6x^2}}{x^2+4x+12}$

19. $y=-\frac{3\sqrt[3]{6(x+1)^2}}{x^2+6x+17}$

20. $y=\sqrt[3]{x^2+6x+8}$

5. Нахождение наибольшего отклонения пожарного автомобиля от прямого пути

Пожарный автомобиль движется по проселочной дороге y=f(x), x∈[a,в]. Необходимо рассчитать наибольшее отклонение от прямого пути (оси OX).

№ варианта	y=f(x)	[a;в]
1	$y=-x^3-3x^2+2$	[-3;2]
2	$y=-1/3x^3-x^2+4$	[-4;2]
3	$y=x^3-3x^2+1$	[-0,5;3]
4	$y=x^3+3x^2-1$	[-3;0,5]
5	$y=2x^3+3x^2-5$	[-2;1]
6	$y=x^3-3x+2$	[-2;3/2]
7	$y=-x^3+3x+3$	[-1,5;2]
8	$y=(2-x)(x+1)^2$	[-1,5;2]
9	$y=(2-x)^2(x+1)$	[-1;2,5]
10	$y=(2+x)(x-1)^2$	[-2;3/2]
11	$y=1/3x^3-x^2+3$	[-1,5;2,5]
12	$y=1/3x^3-x+3$	[-2;3/2]
13	$y=-1/3x^3+x-4$	[-2;3/2]
14	$y=1/3x^3-4x+4$	[-3;3]
15	$y=-1/3x^3+4x+2$	[-3;3]
16	$y=x^3-x^2+1$	[-1;1]
17	$y=-x^3-x^2+4$	[-1;1]
18	$y=-x^3+x^2+3$	[-1;1]
19	$y=x^3-12x$	[-3;3]
20	$y=-x^3+12x$	[-3;3]
21	$y=x^3-6x^2$	[-1;5]
22	$y=-x^3-6x^2$	[-5;1]
23	$y=-x^3+6x^2$	[-1;5]
24	$y=x^3+6x^2$	[-5;1]
25	$y=x^3-27x$	[-4;4]
26	$y=x^3-27x+1$	[-4;4]
27	$y=-x^3+27x$	[-4;4]
28	$y=-x^3+27-1$	[-4;4]
29	$y=x^3-9x^2+8$	[-1;7]
30	$y=-x^3+9x^2+8$	[-1;7]

Приложение 1. Прикладные задачи

Пример 1.

Площади пожаров имеют *прямоугольную* форму равного периметра.

Найти, при каком соотношении сторон прямоугольника площадь наибольшая.

Решение:

Пусть периметр прямоугольника равен p. Обозначим одну из сторон прямоугольника через x. Тогда длина другой стороны будет равна

$$\frac{p-2x}{2}=\frac{p}{2}-x.$$

Площадь прямоугольника вычисляется следующим образом:

$$S=x(\frac{p}{2}-x)=\frac{p}{2}x-x^2 \quad (0<\frac{p}{2}).$$

Исследуем функцию на максимум и минимум с помощью производной:

$$S'=\frac{p}{2}-2x;$$

$$\frac{p}{2}-2x=0;$$

$$x=\frac{p}{4};$$

$S''=-2<0$, следовательно, функция имеет максимум при $x=\frac{p}{4}$.

Имеем, что из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

Пример 2.

В садоводстве требуется вырыть пожарный водоем объемом 108 м^3, имеющий квадратное дно так, чтобы на облицовку его дна и стен пошло наименьшее количество материала.

Каковы должны быть размеры водоема?

Решение:

Пусть сторона дна – x, тогда площадь дна составит x^2, высота водоема – $\frac{108}{x^2}$, а площадь стенки – $\frac{x \cdot 108}{x^2} = \frac{108}{x}$.

Сумма площадей дна и четырех стенок составит:

$$S = x^2 + 4 \cdot \frac{108}{x}.$$

Найдем производную S по x:

$$S' = 2x - \frac{4 \cdot 108}{x^2};$$

$S' = 0$, тогда $x = 6$.

Так как $S'' = 2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 108}{x^3}$ и $S''(6) > 0$, то при $x = 6$ функция имеет минимум.

Высота водоема равна $h = \frac{108}{6^2} = 3$ (м).

Таким образом, получаем, что сторона дна пожарного водоема равна 6 м., а высота – 3 м.

Пример 3.

Из круглой жестянки изготавливают пожарное ведро: вырезают сектор, затем полученная выкройка сворачивается в конус, а шов сваривается.

Требуется рассчитать значение угла вырезки, при котором объем ведра будет максимальным.

Решение:

Выпишем формулу для функции, которая должна быть оптимизирована – объем ведра.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Величина радиуса горловины ведра находится из условия равенства длин окружностей:

$$2\pi r = 2\pi R - 2\pi R \frac{\alpha}{360},$$

откуда

$$r = R\left(1 - \frac{\alpha}{360}\right).$$

По теореме Пифагора высота ведра имеет вид: $h = \sqrt{R^2 - r^2}$.

Таким образом, формула для объема ведра имеет вид:

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}\pi R^3 \left(1 - \frac{\alpha}{360}\right)^2 \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\alpha}{360}\right)^2}.$$

Для упрощения формулы сделаем замену: $t = \left(1 - \frac{\alpha}{360}\right)^2$.

Получим: $V(t) = \frac{1}{3}\pi R^3 t\sqrt{1-t}$.

Найдем критические точки

$$V'(t) = \frac{1}{3}\pi R^3 \left(\sqrt{1-t} + \frac{(-t)}{2\sqrt{1-t}}\right) = 0;$$

$$2 - 3t = 0;$$

$$t = \frac{2}{3}.$$

Так как в точке $t = \frac{2}{3}$ $V'(t)$ меняет знак с плюса на минус, то в этой точке объем имеет максимум.

Имеем $\left(1 - \frac{\alpha}{360}\right)^2 = \frac{2}{3}$. Откуда находим $\alpha = 66{,}06$.

Вырез нужно делать с углом $\approx 66^0$.

Объем ведра будет при этом $V = \frac{1}{3}\pi R^3 \frac{2}{3}\sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{9\sqrt{3}}\pi R^3$.

Задания для самостоятельного решения

1. На промышленном объекте на пожаре под воздействием высокой температуры находится металлическое изделие. Изменение температуры T изделия происходит в зависимости от времени по закону $T = 0,2t^2$.

С какой скоростью нагревается изделие под воздействием температуры пожара в момент времени $t = 10$ с.

2. Пожарная автоцистерна движется прямолинейно. Закон ее движения задан уравнением $S = -t^3 + t^2 + 3$ (S – метры, t – секунды).

Найти максимальную скорость движения пожарной автоцистерны.

3. Площадь пожара имеет форму прямоугольника.

Из всех прямоугольников данного периметра $2p$ требуется найти тот, у которого диагональ наименьшая.

4. Какая из цилиндрических емкостей с данным объемом имеет наименьшую полную поверхность?

5. Пожарное ведро имеет форму конуса.

Найти отношение высоты к диаметру ведра, имеющего при заданном объеме наименьшую боковую поверхность.

Приложение 2. Справочные материалы

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{множителей}}$, где a - основание, n - показатель степени $(n \in N)$

$$1^n = 1, \quad a^1 = a, \quad a^0 = 1 \quad (\text{если } a \neq 0),$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad a^n : a^m = a^{n-m}; \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}; \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{где} \quad (b \neq 0).$$

При этом возведение в отрицательную и дробную степени производится по формулам:

$$(a^{-n}) = \frac{1}{a^n}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n; \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{где} \quad a > 0$$

ПРАВИЛА РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ

а) с помощью вынесения общего множителя за скобки:

$$ab \pm ac = a(b \pm c)$$

$$ab \pm a = a(b \pm 1)$$

$$a - b = -(b - a)$$

б) с помощью формул сокращённого умножения:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$$

Полезна также формула разложения квадратного трёхчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b\,(a > 0, a \neq 1, b > 0)$$

Свойства логарифмов:

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Углы / α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
$ctg\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не сущ.	0	не сущ.

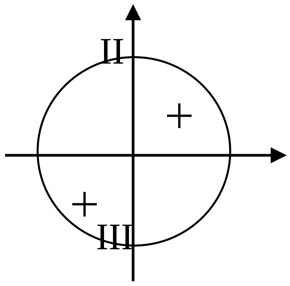
ЧЁТНОСТЬ – НЕЧЁТНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

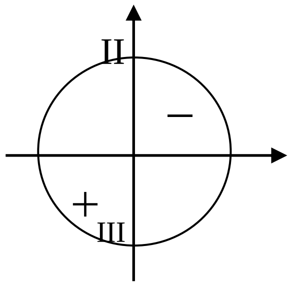
$$tg(-\alpha) = -tg\alpha \qquad ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

ЗНАКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ЧЕТВЕРТЯМ

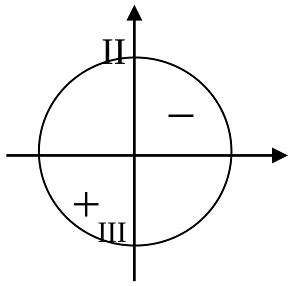
Знаки



Знаки



Знаки тангенса и



ПЕРИОДИЧНОСТЬ

$$\sin(\alpha \pm 2\pi n) = \sin\alpha, \quad n \in Z \qquad \cos(\alpha \pm 2\pi n) = \cos\alpha, \quad n \in Z$$

$$tg(\alpha \pm \pi n) = tg\alpha, \quad n \in Z \qquad ctg(\alpha \pm \pi n) = ctg\alpha, \quad n \in Z$$

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

β	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\beta$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$ctg\beta$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

$\sin x = a, \quad -1 \le a \le 1$	$x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n, n \in Z$
$\cos x = a, \quad -1 \le a \le 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$
$tgx = a, \quad a \in R$	$x = arctga + \pi n,\ n \in Z$
$ctgx = a, \quad a \in R$	$x = arcctga + \pi n,\ n \in Z$

При этом необходимо учитывать, что

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a; \qquad \arccos(-a) = \pi - \arccos a;$$

$$arctg(-a) = -arctga; \qquad arcctg(-a) = \pi - arcctga.$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \qquad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

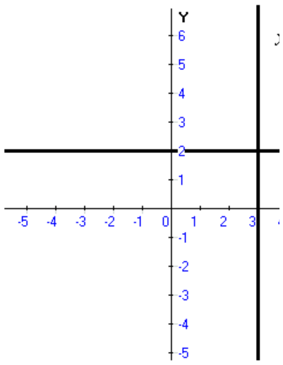
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

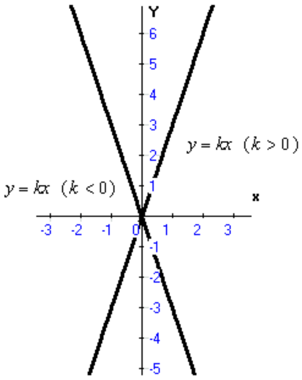
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

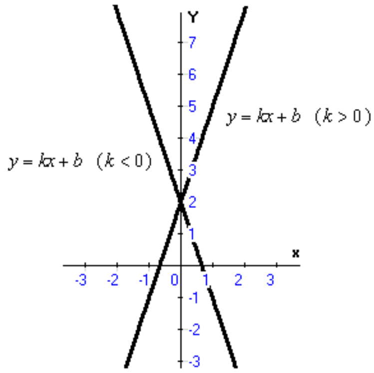
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2}$$

ПРОСТЕЙШИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

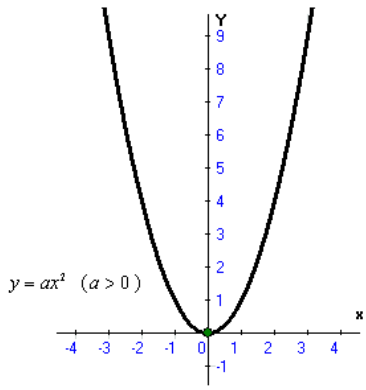
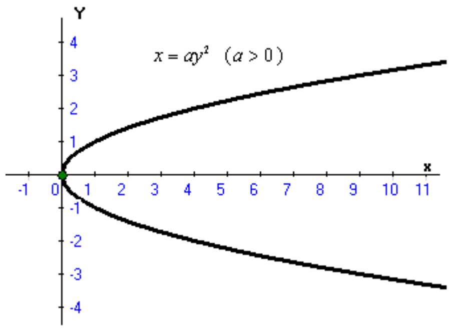
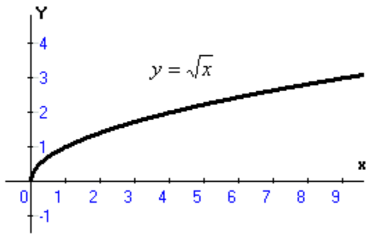
ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

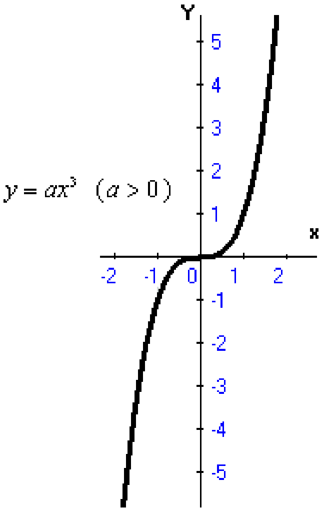
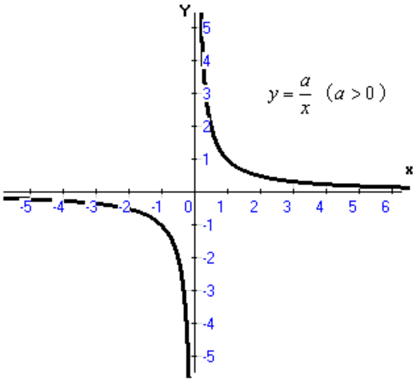
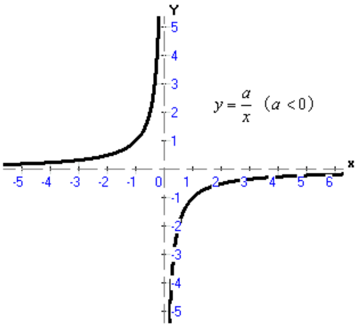




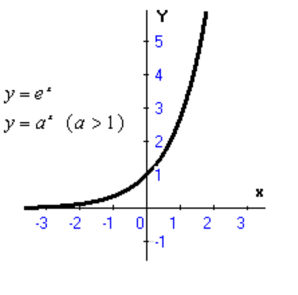


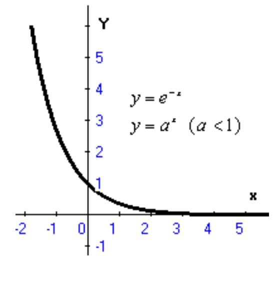
СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ

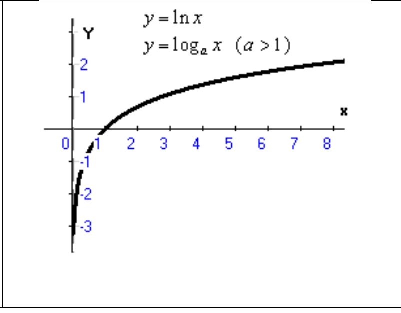
ПАРАБОЛА		КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ
		
КУБИЧЕСКАЯ	**ГИПЕРБОЛА**	

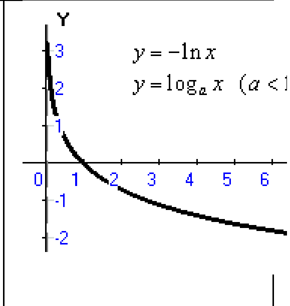
<table>
<tr><td>ПАРАБОЛА</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ	ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ



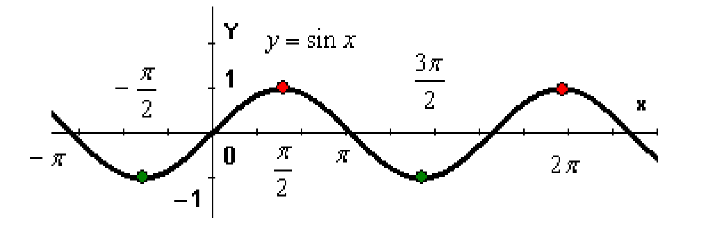


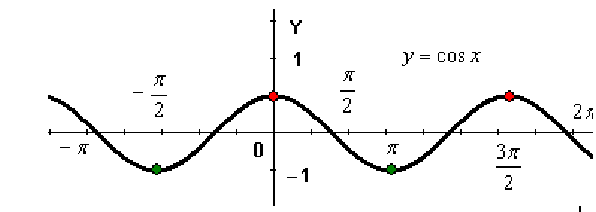




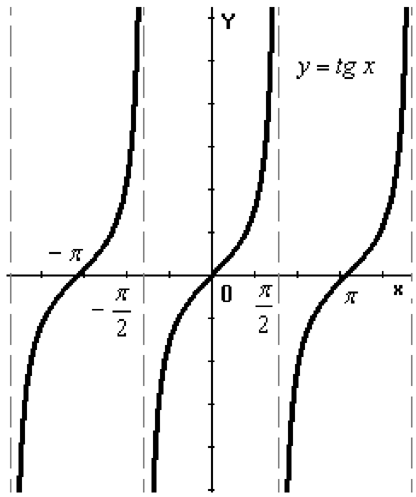
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ

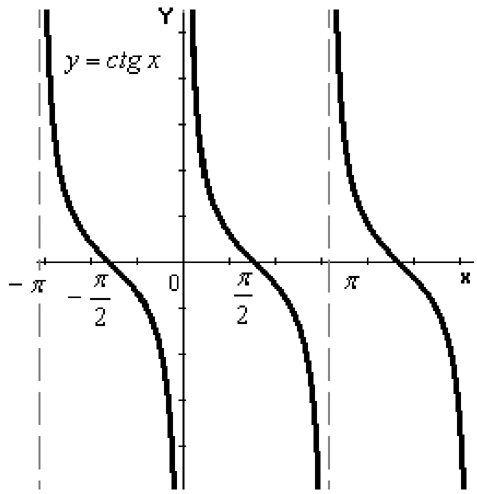
СИНУС	КОСИНУС





ТАНГЕНС	КОТАНГЕНС





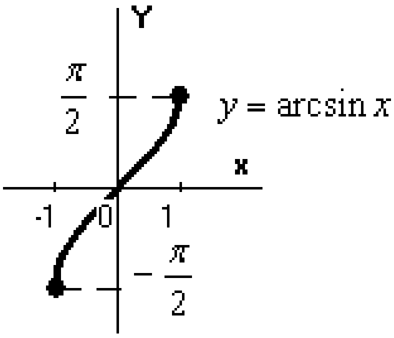
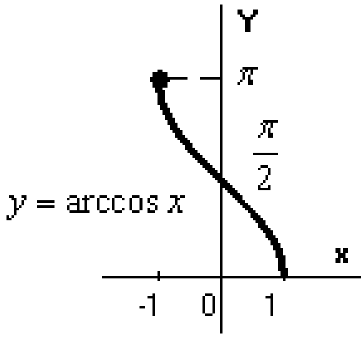
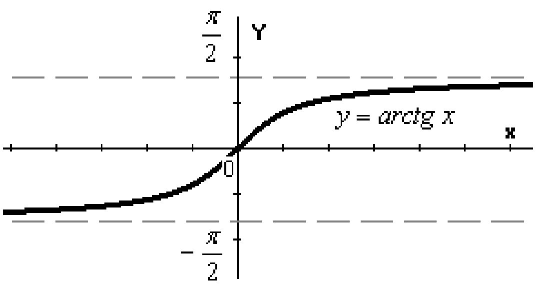
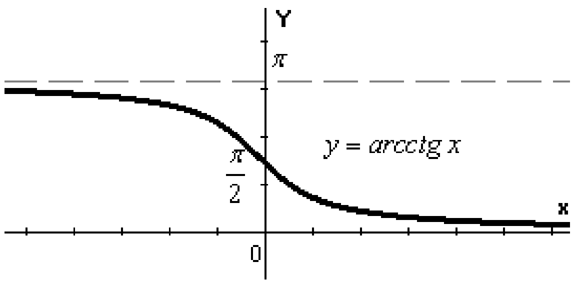
ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ	
АРКСИНУС	**АРККОСИНУС**
	
АРКТАНГЕНС	**АРККОТАНГЕНС**
	

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1. $(c)' = 0$

2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

3. $(e^u)' = e^u \cdot u'$

4. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

5. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

6. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$

7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

9. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

10. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

11. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

12. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

13. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

14. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

15. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$

16. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$

17. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$

18. $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Обозначения: c – постоянная; x – аргумент; u, v, w – функции от x, имеющие производные.

$$(u+v-w)' = u' + v' - w' \qquad (cu)' = cu'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ

Касательная: $y = y_0 + k_{кас}(x - x_0),$ где $y_0 = y(x_0),\quad k_{кас} = y'(x_0)$

Нормаль: $y = y_0 - \dfrac{1}{k_{кас}}(x - x_0),$ где $y_0 = y(x_0),\quad k_{кас} = y'(x_0)$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

$V(t) = S'(t),$ где S - путь, V - скорость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная:

1. Седых И.Ю.Математика: учебник и практикум для СПО / И. Ю. Седых, Ю. Б. Гребенщиков, А. Ю. Шевелев.- М.: Юрайт, 2018. - 443 с.
2. Зельдинова С. А. Математика в пожаротушении: сб. задач / С. А. Зельдинова, В. В. Теребнев, Г. В. Чуканцева. - Екатеринбург: Калан, 2016. - 88 с.
3. Шипачёв В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – 5 изд., стер. – М.: Высшая школа, 2002. – 479 с. (Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений).

Дополнительная:

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие. – СПб: Профессия, 2007. – 432 с.
2. Кудрявцев А.В. Краткий курс математического анализа. Т.1 Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной. Ряды.: Учебник – 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 400 с.
3. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов/ В.С. Шипачев. – 3-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003. – 304 с.

Хонгорова Ольга Викторовна
Есина Марина Геннадьевна

МАТЕМАТИКА. ФУНКЦИЯ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

Учебное пособие
по специальности 20.02.04 «Пожарная безопасность»
квалификация базовой подготовки «Техник»

Подготовлено к изданию 29.05.2020 г.
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 10,7. Уч.-изд. л. 10,0. Заказ № 77
Отделение организации научных исследований
научно-технического отдела
Ивановской пожарно-спасательной академии ГПС МЧС России
153040, г. Иваново, пр. Строителей, 33