ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ИВАНОВСКАЯ ПОЖАРНО-СПАСАТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРОТИВОПОЖАРНОЙ СЛУЖБЫ МИНИСТЕРСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО ДЕЛАМ ГРАЖДАНСКОЙ ОБОРОНЫ, ЧРЕЗВЫЧАЙНЫМСИТУАЦИЯМ И ЛИКВИДАЦИИ ПОСЛЕДСТВИЙ СТИХИЙНЫХ БЕДСТВИЙ

О.В. Хонгорова, М.Г. Есина

МАТЕМАТИКА. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Иваново 2020

УДК 512.642, 512.643

Хонгорова О.В., Есина М.Г.

Математика. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебное пособие – Иваново: ФГБОУ ВО Ивановская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России, 2020. – 213 с.

Материал учебного пособия соответствует программе курса математики по специальности 20.02.04 «Пожарная безопасность» квалификации базовой подготовки «Техник» и отвечает современному уровню данной дисциплины.

Целью пособия является оказание помощи обучающимся, изучающим основы линейной алгебры и аналитической геометрии.

Учебное пособие содержит теоретические сведения по основным разделам теории общего курса линейной алгебры и аналитической геометрии. Каждая тема содержит краткие теоретические сведения и примеры выполнения задания. В пособии приведены задачи и примеры их решения по дисциплине «Математика» по специальности 20.02.04 «Пожарная безопасность» квалификации базовой подготовки «Техник». В приложении приведены типовые расчеты, необходимые для углубленного изучения темы.

Издается по решению Редакционно-издательского совета
Ивановской пожарно-спасательной академии
(Протокол № 3 от 27.05.2020)

Рецензенты:

Заместитель декана физического факультета
ФГБОУ ВО Ивановский государственный университет,
к.ф.-м. н., доцент *Т.В. Пашкова*

Доцент кафедры
государственного надзора и экспертизы пожаров
(в составе УНК «Государственный надзор»)
майор внутренней службы *Е.А. Шварев*

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для учебного и методического обеспечения и проведения учебного процесса по специальности 20.02.04 «Пожарная безопасность» квалификации базовой подготовки «Техник».

Линейная алгебра и аналитическая геометрия изучает такие математические объекты, как матрицы и системы линейных уравнений, вектора и уравнения прямых на плоскости и в пространстве. Методы и понятия линейной алгебры и аналитической геометрии входят в число фундаментальных инструментов количественного анализа практически в любой сфере человеческой деятельности. В частности, при дальнейшем изучении профессиональных задач по специальности 20.02.04 «Пожарная безопасность» квалификации базовой подготовки «Техник» таких, как теоретические основы поддержки управления пожарными подразделениями, многокритериальный метод поддержки принятия решений на основе мониторинга динамики пожара. С помощью данного метода производится решение задачи исследования, состоящей в разработке совокупности моделей многокритериального анализа управленческих решений и метода поддержки принятия решений на основе результатов мониторинга пожара с учетом математического моделирования оперативно-тактических действий, связанных с тушением пожаров и реализуемых силами и средствами пожарных подразделений. Для решения поставленной задачи необходимо произвести исследование моделей многокритериальной оптимизации, охватывающих широкий класс задач многокритериального выбора управленческих решений на основе количественных показателей важности критериев выбора, а для этого необходимы начальные знания основ линейной алгебры.

Целью написания данного пособия является разработка современной учебно-методической литературы нового поколения, которая предполагает использование дифференцированного подхода к обучению студентов с различным уровнем математической подготовки. Данное пособие будет полезно для преподавателей и студентов.

Учитывая вышесказанное, очевидно, что материала данного учебно-методического пособия способствует формированию следующих компетенций:

- владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;
- способность выбирать математические модели организационных систем, анализировать их адекватность, проводить адаптацию моделей к конкретным задачам.
- Способность использовать методы сбора, обработки и интерпретации комплексной информации для решения организационно-управленческих задач, в том числе находящиеся за пределами непосредственной сферы деятельности.

ГЛАВА 1. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1.1. Основные сведения о матрицах

Определение:

Любая прямоугольная таблица чисел (или иных объектов), расположенных в m её строках одинаковой длины и n её столбцах одинаковой длины, называется ***матрицей*** размера $m \times n$ и записывается следующим образом: $A_{m\times n}$.

Числа, из которых состоит такая таблица, называются её *элементами*.

Матрица записывается в виде (1.1)

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

или, сокращенно,

$A = (a_{ij})$, где

$i = \overline{1, m}$ (т.е. $i = 1, 2, 3, \dots, m$) – номер строки,

$j = \overline{1, n}$ (т.е. $j = 1, 2, 3, \dots, n$) – номер столбца.

Обозначения:

$A, B, C, \dots$ – матрицы,

a_{ij}, b_{ij}, $c_{ij}, \dots$ – элементы матриц,

где i − номер строки, j − номер столбца, на пересечении которых стоит элемент.

Определение:

Матрицы A и B называются ***равными***, если у них равны соответствующие элементы:

$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Определение:

Матрица, у которой число строк m равно числу столбцов n, называется ***квадратной матрицей*** *n-го порядка* (1.2).

$$A_{n\times n} = A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Определение:

Совокупность элементов квадратной матрицы с одинаковыми индексами называется ***главной диагональю*** **(1.3)**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Определение:

Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, называется ***диагональной***.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Определение:

Диагональная матрица E, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется ***единичной*** **(1.5)**.

Диагональная матрица имеет вид

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

Определение:

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Определение:

Квадратная матрица, у которой все элементы выше (ниже) главной диагонали, равны нулю, называется ***верхнетреугольной*** (***нижнетреугольной*** (1.6).

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{pmatrix} \qquad \left(A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\right) \qquad (1.6)$$

Определение:

Матрица O, у которой все элементы равны нулю, называется ***нулевой*** имеет вид (1.7)

$$O=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} \qquad (1.7)$$

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Определение:

Матрица, состоящая из одной строки (столбца), называется ***матрицей − строкой (столбцом) или вектором − строкой (столбцом)***.

Матрица – строка:

$$A_{1\times n}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\end{pmatrix} \qquad (1.8)$$

Вектор – строка:

$$\left(A_{m\times 1}=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \dots\\ a_{m1}\end{pmatrix}\right) \qquad (1.9)$$

Пример 1.1.

Рассмотрим наглядно виды матриц:

1) Данная матрица $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 0 & -1\\ 2 & 7 & 0 & -3\\ 0 & 3 & 7 & 5\end{pmatrix}$ является матрицей размера 3 × 4,

2) Матрица $B=\begin{pmatrix}11 & 1\\ -8 & 2\end{pmatrix}$ является квадратной матрицей 2-го порядка,

3) Диагональная матрица 3-го порядка имеет вид $\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}$,

4) Матрица вида: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 5 & -4 & 0\\ -9 & 7 & -1\end{pmatrix}$ – нижнетреугольная матрица 3-го порядка,

5) Матрица $\begin{pmatrix}1 & 0 & -5\\ 0 & -7 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ –верхнетреугольная матрица 3-го порядка,

6) Данная матрица $\begin{pmatrix}-8\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$ является матрицей-столбцом,

7) Матрица $C = (7 \quad -9 \quad 0 \quad 5)$ является матрицей-строкой.

Определение:

Ведущим элементом строки матрицы называется первый её ненулевой элемент.

Определение:

Ступенчатой матрицей называется матрица, удовлетворяющая двум условиям:

1) все нулевые строчки расположены ниже ненулевых,
2) в каждой строке ведущий элемент расположен правее ведущего элемента предыдущей строки.

Нулевая матрица по определению является ступенчатой.

Пример 1.2.

Рассмотрим наглядно ступенчатые матрицы:

1) Рассмотрим матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В матрице ведущим элементом первой строки является число 3; второй – 5; третьей – 7.

2) Рассмотрим матрицы A и B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B являются ступенчатыми.

3) Рассмотрим матрицу *C*:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица не является ступенчатой, так как не выполнены определенные условия.

Следствие:

Исходя из определения, можно сделать вывод, что ступенчатыми матрицами являются: диагональные матрицы, единичные матрицы, верхнетреугольные матрицы.

Элементарные (эквивалентные) преобразованиями матрицы над строками:

1) перестановка местами двух строк матрицы,
2) умножение строки матрицы на число, не равное нулю,
3) умножение строки матрицы на число и прибавление к другой строке,
4) вычёркивание (вписывание) строки, состоящей из нулей.

Аналогичные преобразования можно производить и над столбцами матрицы.

Определение:

Две матрицы *A* и *B* называются ***эквивалентными***, если одна из них получена из другой с помощью элементарных преобразований.

Две эквивалентные матрицы обозначаются следующим образом:

$A \sim B$.

Всякую матрицу с помощью элементарных преобразований строк и столбцов можно привести к ступенчатому виду.

Пример 1.3.

Привести матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ к ступенчатому виду.

Решение:

Рассмотри матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Выполняя элементарные преобразования, получаем

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ x } (-2)$$

умножаем элементы первой строки на (–2) и прибавляем ее к третьей строке данной матрицы;

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ x } 3$$

умножаем элементы второй строки на 3 и прибавляем ее к третьей строке данной матрицы;

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

таким образом, получаем ступенчатую матрицу

1.2. Действия над матрицами

Рассмотрим основные операции, которые можно выполнять над матрицами.

1. Сложение

Операция сложения матриц вводится только для ***матриц одинаковых размеров.***

Определение:

Суммой двух матриц

$A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$

называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$ такая, что

$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ (1.10).

$$C_{m\times n}=A_{m\times n}+B_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}=$$

(1.10)

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Аналогично определяется разность матриц.

Замечание:

Складывать и вычитать можно только матрицы одинаковой размерности.

Пример 1.4.

Вычислим сумму двух матриц A и B, где

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 7 & -4 & 3 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 8 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение:

Рассмотрим матрицы A и B:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 7 & -4 & 3 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 8 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Так как даны две матрицы одной размерностью, то сумма данных матриц существует и вычисляется по определению:

$$A+B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 7 & -4 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 2 & 8 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+(-4) & -1+2 & 0+8 \\ 7+(-2) & -4+0 & 3+6 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 5 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Умножение на число

Определение:

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ ***на число k*** называется матрица $B_{m\times n}=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$.

$$B_{m\times n}=k\cdot A_{m\times n}=A_{m\times n}\cdot k=k\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\cdot k=$$

$$= \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример 1.5.
Выполнить умножение матрицы A на число k

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 7 & -4 & 3 \end{pmatrix}; k = 2.$$

Решение:

При выполнении данного примера воспользуемся определением произведения матрицы на число, получим:

$$A \cdot k = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 7 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 & -1 \cdot 2 & 0 \cdot 2 \\ 7 \cdot 2 & -4 \cdot 2 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 0 \\ 14 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Определение:
Матрица $(-A) = (-1) \cdot A$ называется ***противоположной*** матрице A.

Таким образом, разность двух матриц $A - B$ можно понимать так (1.11):

$$A - B = A + (-B). \tag{1.11}$$

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

Пусть даны A, B, C – матрицы, α и β – числа, тогда

1. $A+B = B+A;$
2. $A+(B+C) = (A+B)+C;$
3. $A+O = A;$
4. $A-A = O;$
5. $1 \cdot A = A;$
6. $\alpha \cdot (A+B) = \alpha \cdot A+\alpha \cdot B;$
7. $(\alpha+\beta) \cdot A = \alpha \cdot A+\beta \cdot A;$
8. $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A);$

3. *Произведение матриц*

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда ***число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы***.

Определение:

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ ***на матрицу*** $B_{n\times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p} = (c_{ik})$ такая, что

$$c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nk}, \text{ где } i = \overline{1,m}, k = \overline{1,p}, \qquad (1.12)$$

т.е. элемент i-й строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

Получение элемента c_{ik} схематично изображается так (Рис. 1.1):

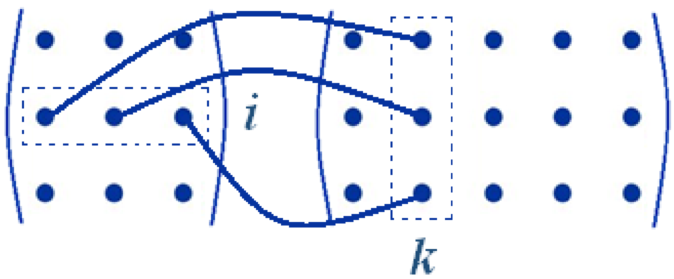


Рис. 1.1. Вычисление элемента c_{ik}

Пример 1.6. Вычислить произведение матриц размерностью 2×3 и 3×2 в общем виде.

Решение:

Для начала мы должны определить, выполняется ли умножение матриц, то есть количество столбцов первого множителя (в первой матрице три столбца) должно совпадать с количеством строк второго множителя (во второй матрице три строки). После чего, применяем определение умножения двух матриц (Рис. 1.2).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times3} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times2} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2\times2}$$

Рис. 1.2. Произведение матриц

Пример 1.7.

Вычислить произведение матриц *A* и *B:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -9 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение:

Проверим сначала выполнение условия, при котором матрицы можно перемножать.

Сначала проверим, можно ли умножить матрицу *A* на матрицу *B*.

Так как число столбцов матрицы *A* равно 3, а число строк матрицы *B* равно 2, следовательно, произведение *A* на *B* не существует.

Проверим, возможно ли умножение матрицы *B* на матрицу *A*.

Так как число столбцов матрицы *B* равно 2 и число строк матрицы *A* равно 2, следовательно, произведение *B* на *A* существует.

Произведение *B* на *A* вычисляется следующим образом:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -9 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-45 & 2+0 & 1+25 \\ -2-63 & 4+0 & 2+35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -46 & 2 & 26 \\ -65 & 4 & 37 \end{pmatrix}.$$

Произведения *A*·*B* и *B*·*A* будут существовать, если матрицы *A* и *B* являются квадратными и имеют одинаковую размерность.

Определение:

Матрицы *A* и *B* называются ***перестановочными***, если будет выполняться условие *A*·*B* = *B*·*A*.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

Пусть A, B, C – матрицы, α – число, тогда

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$;
3. $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
4. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$;
5. $A \cdot E = E \cdot A = A$, где A–квадратная матрица, E–единичная матрица того же размера.

В данных свойствах необходимо учитывать, что левые части имеют смысл, тогда будут иметь смысл и правые части, причём выполняются все равенства.

Необходимо знать, что произведение матриц некоммутативно, т. е. не выполняется равенство $A \cdot B \neq B \cdot A$. Покажем это свойство на примере.

Пример 1.8.
Вычислить произведение матриц A *и* B, а затем B *и* A, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Вычислим произведение матриц A *и* B:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 4 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Вычислим произведение матриц B *и* A:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Определение:

Матрица A^T, полученная из матрицы A заменой строк соответствующими столбцами, называется ***транспонированной матрицей*** к матрице A.

Для операции транспонирования верны следующие свойства:

1) $(A^T)^T = A$;
2) $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$;
3) $(A+B)^T = A^T+B^T$;
4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Пример 1.9.

Вычислить матрицу $-2 \cdot A + 3 \cdot B^T$, если известно, что

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Для начала вычислим матрицу B^T, транспонированную матрице B:

$$B^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

После вычислим матрицы $-2 \cdot A$ и $3 \cdot B^T$, умножив все элементы матрицы A на (–2), а матрицы B^T – на 3. Затем вычислим сумму полученных матриц $-2 \cdot A$ и $3 \cdot B^T$ (поэлементно).

Получим:

$$-2 \cdot A + 3 \cdot B^T = -2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 15 & 12 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 15 & 10 \\ 2 & -17 \end{pmatrix}$$

1.3. Задачи на самостоятельную подготовку

№1. Найти линейные комбинации матриц:

а) $\boldsymbol{3A-2B}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

б) $\boldsymbol{2B-5A}$, $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ -6 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 5 & 10\\ -15 & 10 & 0\end{pmatrix}$.

в) $\boldsymbol{A-\lambda E}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

г) $\boldsymbol{4A-7B}$, $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5 & 3\\ 2 & 0 & -3 & 1\\ 5 & -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 7 & -5\\ -8 & 1 & 3 & 0\\ 4 & 2 & -2 & 5\end{pmatrix}$

д) $\boldsymbol{5A-3B}+2C$, $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ -3 & 2 & 7\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 5\\ 6 & 4 & 2\end{pmatrix}$

№2. Найти произведения матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$ (если это возможно):

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ -3\\ -4\\ 1\end{pmatrix}$.

в) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4\\ -3\\ 5\end{pmatrix}$.

г) $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}$

д) $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 5 & 4 & 0\\ 2 & -1 & -5\end{pmatrix}$**,** $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -3 & 1\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

№3. Найти матрицу A^2-$4\cdot B$, если:

а) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$**,** $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$**,** $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$**.**

№4. Привести данную матрицу к ступенчатому виду:

а) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 2 & 4\\ 3 & 5 & 1 & -1\\ 6 & 7 & 8 & 1\end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

№5. Даны матрицы A и B. Найти матрицу C.

а) $A=\begin{pmatrix}-4 & 5 & 1\\ 2 & -3 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & 4\\ 10 & -5\\ 3 & 16\end{pmatrix}$, $C=B-2A^T$

б) $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $C=(3A)^T-B$

в). $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & -1 & 5\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $C=A+B^T$

г) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $C=2A+3B$

д) $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=A^T-B^T$

Контрольные вопросы к Главе 1

1. Что такое матрица?
2. Что называется матрицей заданной размерности (порядка)?
3. Что называется элементами матрицы?
4. Как обозначаются матрицы?
5. Как записываются матрицы в общем виде?
6. Как определить матрицу-столбец и матрицу-строку?
7. Какие обозначения используются у матриц, элементов матриц?
8. Как определить квадратную матрицу?
9. Как определяется порядок квадратной матрицы:
10. Введите понятия главной диагонали матрицы
11. Введите понятие верхнетреугольной матрицы.
12. Введите определение диагональной матрицы.
13. Как определяются нулевая и единичная матрицы?
14. Как определяется произведение матрицы на число?
15. Как определяется сумма двух матриц?
16. Как определяется разность двух матриц?
17. Как применить правило «строка на столбец»?
18. Как найти произведение двух матриц?
19. Как определяется правило размерностей?
20. Как определяется транспонированная матрица?

ГЛАВА 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

2.1. Основные понятия

Определение:
Любой квадратной матрице A n-го порядка (2.1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

можно сопоставить выражение, называемое ***определителем*** (***детерминантом***) матрицы A, которое обозначается следующим образом (2.2) - (2.4):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2.2)$$

или

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2.3)$$

или

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2.4)$$

Рассмотрим правила нахождения определителей матриц.

1. *Определитель 1-го порядка*

Определитель 1-го порядка равен самому элементу данной матрицы (2.5), т.е.

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}. \tag{2.5}$$

2. *Определитель 2-го порядка*

Определитель 2-го порядка задается равенством (2.6):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + (-a_{12}a_{21}) \tag{2.6}$$

Таким образом, определитель 2-го порядка есть сумма 2 = 2! слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение 2-х сомножителей – элементов матрицы A, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одно из слагаемых берется со знаком «+», другое – со знаком «–».

Вычисление определителя 2-го порядка наглядно представлено следующей схемой (Рис. 2.1):

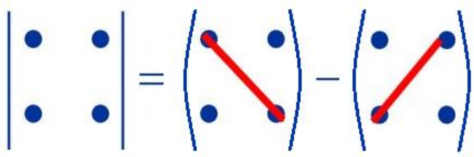


Рис. 2.1. Схема вычисления определителя 2-го порядка

Пример 2.1. Найти определители матриц:

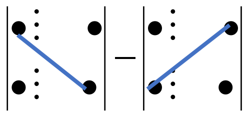
а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, б) $B = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$.

Решение:

а) Для вычисления данного определителя воспользуемся правилом нахождения определителя 2-го порядка:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 + (-2) \cdot 4 = 18 + 8 = 26.$$

Для вычисления воспользуемся схемой (2.1):



б) $\Delta_B = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} =$

$$= \sin\alpha \cdot \sin\alpha - \cos\alpha \cdot \left(-\cos\alpha\right) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

3. Определитель 3-го порядка

Определитель 3-го порядка задается равенством (2.7):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{11} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \tag{2.7}$$

$$+ (-a_{13}a_{22}a_{31}) + (-a_{12}a_{21}a_{33}) + (-a_{11}a_{23}a_{32})$$

Таким образом, определитель 3-го порядка есть сумма 6 = 3! слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение 3-х сомножителей – элементов матрицы *A*, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одна половина слагаемых берется со знаком «+», другая – со знаком «–». Правило, по которому выбираются эти знаки, задается с помощью заданной формулы или другими методами, приведенными ниже.

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться правилом треугольников (или Саррюса), которое наглядно представлено следующей схемой (Рис. 2.2):

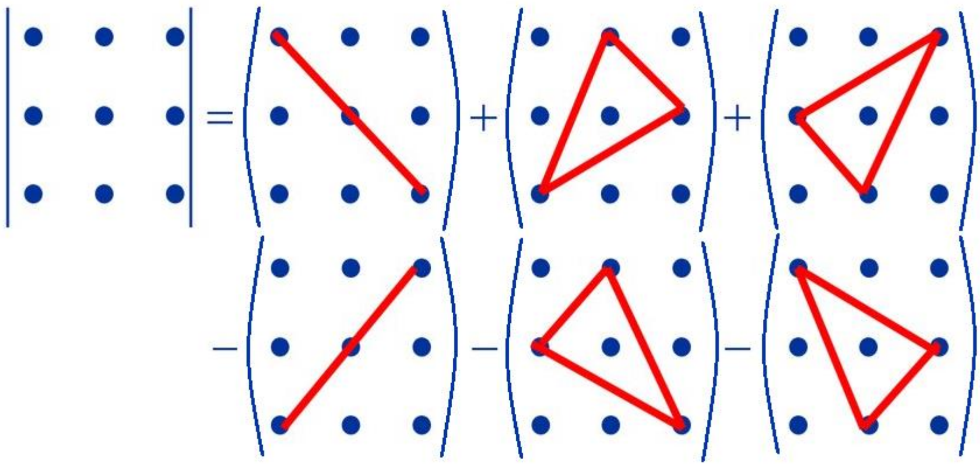


Рис. 2.2. Схема вычисления определителя 3-го порядка

А также существуют и другие упрощенные методы вычисления определителя 3-го порядка. К примеру, удобен для использования, так как является наглядным методом, так называемый «метод параллельных прямых»:

Определитель третьего порядка равен сумме шести слагаемых, получаемых перемножением элементов, попавших на параллельные линии матрицы, полученной из исходной матрицы приписыванием к ней справа дополнительно первых двух столбцов этой матрицы. Схематически это выглядит следующим образом (Рис. 2.3):

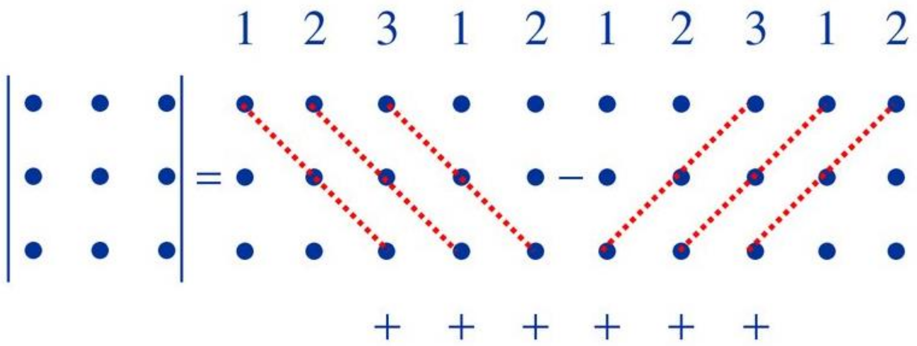


Рис. 2.3. Схема вычисления определителя 3-го порядка

Аналогично, определитель третьего порядка равен сумме шести слагаемых, получаемых перемножением элементов, попавших на параллельные линии матрицы, полученной из исходной матрицы приписыванием к ней снизу дополнительно первых двух строк этой матрицы.

Схематически это выглядит следующим образом (Рис. 2.4):

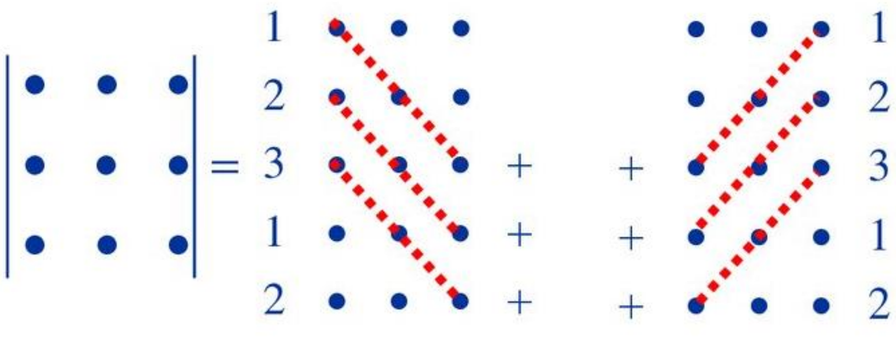


Рис. 2.4. Схема вычисления определителя 3-го порядка

Пример 2.2. Вычислить определитель 3-го порядка

$$A=\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -4\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}$$

Решение:

Для вычисления определителя 3-го порядка воспользуемся правилом треугольника:

$$\det A=\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -4\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -4\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -4\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -4\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -4\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -4\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -4\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=5\cdot 1\cdot(-3)+(-2)\cdot(-4)\cdot 6+3\cdot 0\cdot 1-6\cdot 1\cdot 1-3\cdot(-2)\cdot(-3)-0\cdot(-4)\cdot 5=$$

$$=-15+48-6-18=48-39=9$$

Рассмотрим решение данного примера «методом параллельных прямых»:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{matrix} - \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{matrix} =$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot 0 - 6 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-4) \cdot 5 - (-3) \cdot 3 \cdot (-2) =$$

$$= -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9$$

2.2. Определитель матрицы *n*-го порядка

Определитель n-го порядка задается равенством (2.8):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \left(\pm\, a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n} \right). \qquad (2.8)$$

Указанная сумма состоит из $n!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение n сомножителей – элементов матрицы A, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одна половина слагаемых берется со знаком «+», а другая – со знаком «–».

Определение:

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы An - го порядка называется определитель, получаемый из определителя $|A|$ путём вычёркивания i - йстроки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Из данного определения следует, что минор M_{ij} – определитель, порядок которого на единицу меньше, чем у определителя $|A|$, т. е. порядок M_{ij} равен n –1.

Пример 2.3.

Вычислить миноры M_{23}, M_{22}матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Для вычисления миноров воспользуемся определением:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -12$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

Определение:

Алгебраическим дополнением A_{ij} ***элемента*** a_{ij} матрицы An – го порядка называется минор M_{ij} элемента a_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$ (2.9):

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \tag{2.9}$$

Пример 2.4.

Вычислить алгебраические дополнения A_{21} и A_{22} данной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Для вычисления алгебраических дополнений воспользуемся определением:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -(2+8) = -10$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

Определение:

Определителем квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ n - го порядка называется число $|A|$, вычисляемое по формуле (2.10):

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \ldots + a_{1n} \cdot A_{1n} \qquad (2.10)$$

Данную формулу называют *разложением определителя* $|A|$ *по элементам 1-й строки*.

Теорема. Определитель квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ n-го порядка равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на их алгебраические дополнения (2.11-2.12):

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} \qquad (2.11)$$

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj} \qquad (2.12)$$

Первая формула – разложение определителя $|A|$ по элементам i-й строки, а вторая – по элементам j-го столбца.

Пример 2.5.

Вычислить определитель матрицы четвертого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Для вычисления определителя четвертого порядка воспользуемся теоремой о разложении определителя по элементам. Разложим данный определитель по первой строке:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-6 - 6 + 16 + 4) + 2 \cdot (8 + 45 - 80 - 12) = 24 - 78 = -54$$

* не забываем вычисление определителя 3-го порядка.

Используем любой способ удобный способ.

Для наглядности рассмотрим правило треугольника:

$$\begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 4 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 4 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 4 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 4 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 4 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 4 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 4 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} = -6 - 6 + 16 + 4 = 8$$

2.3. Свойства определителей

1. Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов главной диагонали (2.13).

$$\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}. \tag{2.13}$$

2. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали (2.14).

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}. \tag{2.14}$$

3. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется (2.15):

$$|A| = \left|A^T\right|. \tag{2.15}$$

Из свойства 3 следует, что строки и столбцы в определителе равноправны.

4. При перестановке двух строк (столбцов) ее определитель меняет знак.

При упорядочении элементов по строкам в определителях, у которых переставлены i-я строка с $(i+k)$-й, два соответствующих слагаемых будут переходить друг друга с помощью $2k-1$ перестановок соседних элементов. Поэтому они должны отличаться знаком (2.16).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2.16).$$

5. Общий множитель всех элементов одной строки (столбца) можно выносить за знак определителя (2.17).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \dots & k\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2.17).$$

6. Определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца), равен нулю (2.18).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.18).$$

7. Если в определителе каждый элемент какой-нибудь строки представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух соответствующих слагаемых (2.19).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+c_{21} & a_{22}+c_{22} & \dots & a_{2n}+c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2.19)$$

8. Определитель, имеющий строку (столбец) из нулей, равен нулю (2.20).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.20)$$

9. Если в определителе соответствующие элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, то он равен нулю (2.21).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.21)$$

10. Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число (2.22).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + k \cdot a_{11} & a_{22} + k \cdot a_{12} & \dots & a_{2n} + k \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2.22)$$

11. **«Фальшивое разложение определителя»**

Сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Следствие.

Если какая-нибудь строка (столбец) определителя – линейная комбинация других строк (столбцов), то определитель равен нулю.

12. Определитель произведения двух квадратных матриц одного порядка равен произведению определителей этих матриц (2.23).

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \qquad (2.23)$$

Замечание.

Свойство 10 содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков, основанный на элементарных преобразованиях.

Пример 2.6.

Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение:

Воспользуемся элементарными преобразованиями, для того чтобы обнулить первый столбец:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} (2), \quad (-3), \quad (-4) =$$

прибавим к элементам первой строки элементы второй строки, умноженные на 2, к элементам третьей строки – элементы второй строки, умноженные на (− 3), а к элементам четвертой строки – элементы второй строки, умноженные на (– 4)

После элементарных преобразований воспользуемся теоремой разложения определителя по первого столбца.

$$= \begin{vmatrix} 0 & 9 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -14 & -3 & 4 \\ 0 & -11 & -5 & 6 \end{vmatrix} =$$

разложим полученный определитель по элементам первого столбца:

$$= 0 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} = A_{21} = -\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ -14 & -3 & 4 \\ -11 & -5 & 6 \end{vmatrix} =$$

* в полученном определителе еще раз воспользуемся элементарными преобразованиями и теоремой разложения определителя по элементам столбца

$$-\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ -50 & -19 & 0 \\ -65 & -29 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -50 & -19 \\ -65 & -29 \end{vmatrix} = -5 \cdot (290 - 247) = -215$$

2.4. Задачи на самостоятельную подготовку

1. Вычислить определители:

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}; \quad 2)\ \begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \\ -\cos 3\alpha & \sin 3\alpha \end{vmatrix}; \quad 3)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad 4)\ \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определители:

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad 2)\ \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}; \quad 3)\ \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 7 & -8 & 4 \end{vmatrix}; \quad 4)\ \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Вычислить определители, используя свойства определителей:

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}; \quad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix};$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad 4)\ \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Дан определитель.
   Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов:
   1) второй строки
   2) третьего столбца

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

5. Вычислить определители из задания 2, используя теорему о разложении по элементам ряда. Разложите по элементам 1-ой строки.

6. Вычислить определители, используя теорему о разложении:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 1 & b \\ 3 & 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & 3 & d \end{vmatrix}; \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ a & b & c & d \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ -2 & -2 & 1 & b \\ 3 & -4 & 1 & c \\ 1 & 2 & 0 & d \end{vmatrix}; \qquad 4)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ a & -b & c & -d \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$5)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & d \end{vmatrix}; \qquad 6)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & 1 \\ a & b & c & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -d \end{vmatrix}$$

$$7)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & 1 & c & 5 \\ 4 & b & 2 & 1 \\ 1 & 2 & c & 3 \end{vmatrix}; \qquad 8)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & a & -4 & 1 \\ 1 & 2 & d & 1 \\ -2 & -1 & 1 & c \end{vmatrix}$$

Контрольные вопросы к Главе 2

1. Введите общее понятие об определителе матрицы
2. Как обозначаются определители матриц?
3. Как найти определитель 2-го порядка?
4. Как найти определитель 3-го порядка?
5. Как использовать правило Сарруса для определителя 3-го порядка?
6. Какие основные свойства определителей известны?

ГЛАВА 3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. РАНГ МАТРИЦЫ И СПОСОБЫ ЕГО НАХОЖДЕНИЯ

3.1. Обратная матрица

Определение:

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка, тогда матрица B называется ***обратной*** к матрице A, если выполняется условие (3.1)

$$A \cdot B = B \cdot A = E. \tag{3.1}$$

Квадратная матрица A называется ***обратимой***, если для неё существует обратная матрица.

Теорема.

Если квадратная матрица A – обратимая, то для неё существует единственная ей обратная матрица.

Квадратную матрицу, обратную к матрице A, будем обозначать A^{-1}.

Определение:

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если её определитель $|A|$ не равен нулю.

Теорема (критерий обратимости матрицы).

Квадратная матрица A является обратимой тогда и только тогда, когда она является невырожденной матрицей.

Для нахождения обратной матрицы используют следующую формулу (3.2):

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Отметим свойства обратной матрицы:

1. $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det A}$;
2. $\left(A\cdot B\right)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$;
3. $\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}$.

Пример 3.1.

Определить, при каких значениях λ существует матрица, обратная данной:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Для того, чтобы существовала обратная матрица, исходная матрица должна быть невырожденной, т.е. $\Delta A\neq 0$.

Составим определитель исходной матрицы, используя правило треугольника:

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}-$$

.

$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3-0+2\lambda-12-0+2\lambda=4\lambda-9$$

Таким образом,

$$4\lambda - 9 \neq 0 \;=>\; \lambda \neq \frac{9}{4}.$$

Пример 3.2.

Найти матрицу, обратную данной

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение:

Найдем определитель матрицы:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 12 + 0 + 9 - 0 - 0 = 14 \neq 0,$$

следовательно, матрица невырожденная и имеет обратную.

Найдем алгебраические дополнения к каждому элементу матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\3&0&7\end{vmatrix}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2&3\\0&7\end{vmatrix}=-14;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\3&0&7\end{vmatrix}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1&3\\3&7\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\3&0&7\end{vmatrix}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}=6;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\3&0&7\end{vmatrix}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2&3\\-1&2\end{vmatrix}=7;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\3&0&7\end{vmatrix}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\3&0&7\end{vmatrix}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}1&2\\0&-1\end{vmatrix}=-1.$$

Составим матрицу из полученных алгебраических дополнений:

$$\begin{pmatrix}-7&6&3\\-14&-2&6\\7&-2&-1\end{pmatrix},$$

транспонируем полученную матрицу:

$$\begin{pmatrix}-7&6&3\\-14&-2&6\\7&-2&-1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-7&-14&7\\6&-2&-2\\3&6&-1\end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}.$$

3.2. Минор матрицы. Метод окаймляющих миноров

Определение:

Пусть A – матрица размера $m \times n$.

Выделим в матрице какие-нибудь k строк и k столбцов $(1 = k \le \min\{m,n\})$. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Он называется ***минором k-го порядка*** данной матрицы A.

Определение:

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля её миноров.

Обозначения: $rangA$ или r_A.

Ранг нулевой матрицы считается равным нулю.

Вычисление ранга матрицы по определению связано с подсчётом большого числа определителей. Поэтому при вычислении ранга матрицы используют один из двух методов: метод окаймляющих миноров или метод элементарных преобразований.

Метод окаймляющих миноров

В основе метода окаймляющих миноров лежит следующая теорема.

Теорема (метод окаймляющих миноров).

Если в матрице какой-нибудь минор порядка r не равен нулю, а все миноры порядка $r+1$, его содержащие, равны нулю, то ранг матрицы равен r.

Определение: Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется ***базисным***.

Пример 3.3.

Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4 & 3\\ 2 & 1 & -3 & 5\\ 1 & 8 & 6 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение:

Так как матрица A не является нулевой, то $rangA \geq 1$.

В матрице A имеется минор порядка 2, отличный от нуля, например,

$$M_2^{(1)}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5\neq 0.$$

Следовательно, *rang A*≥2. Подсчитаем всевозможные миноры 3-го порядка, окаймляющие $M_2^{(1)}$. Их два:

$$M_3^{(1)}=\begin{vmatrix}1 & -2 & -4\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 8 & 6\end{vmatrix}\begin{array}{c}(-2),(-1)\\ +\\ +\end{array}=\begin{vmatrix}1 & -2 & -4\\ 0 & 5 & 5\\ 0 & 10 & 10\end{vmatrix}=0,$$

$$M_3^{(2)}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & 8 & 1\end{vmatrix}\begin{array}{c}(-2),(-1)\\ +\\ +\end{array}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & 10 & -2\end{vmatrix}=0$$

Таким образом, все окаймляющие миноры минора $M_2^{(1)}$ равны нулю. Значит, *rangA*= 2. Следовательно, $M_2^{(1)}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}$ является базисным минором. Заметим, что у матрицы может быть несколько базисных миноров.

3.3. Метод элементарных преобразований

Теорема (о ранге матрицы при элементарных преобразованиях).
Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях.

Теорема (о ранге ступенчатой матрицы).
Ранг ступенчатой матрицы равен числу её ненулевых строк.

Всякую матрицу с помощью элементарных преобразований строк и столбцов можно привести к ступенчатому виду.

Теорема (о ранге матрицы).
Ранг матрицы равен рангу ей эквивалентной ступенчатой матрицы.

Пример 3.4.
Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Приведем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2),(-1) \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \\ 0 & 10 & 10 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Число ненулевых строк равно 2, следовательно, $rang A = 2$.

3.4. Задачи на самостоятельную подготовку

№1. Какие из следующих матриц являются обратимыми:

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};\qquad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix};\qquad 3)\ \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix};\qquad 4)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

№2. Найдите матрицу A^{-1}, если:

$$1)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};\qquad 2)\ A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3)\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix};\qquad 4)\ A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5)\ A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};\qquad 6)\ A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

№3. Найти ранги матриц двумя способами (с помощью элементарных преобразований и методом окаймляющих миноров):

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix};\qquad 2)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix};$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Контрольные вопросы к Главе 3

1. Определитель – это матрица или число?

2. В каких случаях определитель равен нулю?

3. Если k строк определителя умножить на одно и тоже число n, то как изменится определитель?

4. Определения минора и алгебраического дополнения элемента матрицы.

5. В разложение определителя по элементам строки входят миноры или алгебраические дополнения?

6. Что такое невырожденная (неособая) квадратная матрица?

7. Определение обратной матрицы.

8. Почему обратную матрицу может иметь только невырожденная матрица?

9. Имеет ли обратную матрицу прямоугольная матрица порядка 3×2?

10. Имеет ли обратную матрицу матрица $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и почему?

ГЛАВА 4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Основные понятия

Определение:

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

где

x_1, x_2, …, x_n называются ***неизвестными***;

a_{11}, a_{21}, a_{13}, …, a_{mn} –***коэффициентами при соответствующих неизвестных***;

b_1, b_2,…, b_m – ***свободными членами***.

Систему линейных уравнений (4.1) можно записать в матричной форме:

$$A \cdot X = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$.

При этом A – основная матрица системы, состоящая из коэффициентов при соответствующих неизвестных; X – матрица-столбец из неизвестных; B – матрица-столбец из свободных членов.

Определение:

С системой линейных уравнений (4.1) связана ещё одна матрица $\tilde{A}$, полученная из матрицы A добавлением столбца B свободных членов, и называемая ***расширенной матрицей*** системы (4.2):

$$\tilde{A} = (A|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \qquad (4.20)$$

Определение:

Если в системе линейных уравнений (4.1) все свободные члены равны нулю (т. е. B – нулевая матрица-столбец), то она называется ***однородной,*** в противном случае – ***неоднородной***.

Определение:

Решением системы линейных уравнений называется упорядоченная совокупность n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, которая при подстановке в систему обращает каждое уравнение в тождество.

Определение:

Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется ***совместной,*** в противном случае – ***несовместной.***

Определение:

Две системы линейных уравнений называются ***равносильными*** (*эквивалентными*), если равны множества их решений.

4.2. Решение системы уравнений матричным методом

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными, у которой матрица A системы – невырожденная, т. е. $|A| \neq 0$.

Запишем систему в матричной форме:

$A \cdot X = B$.

Так как $|A| \neq 0$, то существует матрица A^{-1}.

Умножим слева обе части матричного уравнения $A \cdot X = B$ на A^{-1}:

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Полученное равенство – матричная форма записи решения системы (4.1). Для того чтобы найти элементы матрицы X из неизвестных, нужно найти обратную матрицу A^{-1} и умножить её на столбец свободных членов B.

Пример 4.1.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}.$$

Решение:

Запишем все коэффициенты и переменные системы в виде матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы можно записать в виде:

$X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем обратную матрицу, для этого вычислим определитель матрицы A:

$$\det A = 12 + 12 = 24 \neq 0,$$

следовательно, матрица невырожденная и имеет обратную.

Найдем алгебраические дополнения к каждому элементу матрицы:

$A_{11} = (-1)^2 \cdot 4 = 4$; $A_{12} = (-1)^3 \cdot 3 = -3$; $A_{21} = (-1)^3 \cdot (-4) = 4$; $A_{22} = (-1)^4 \cdot 3 = 3$.

Составим матрицу: $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$,

транспонируем ее: $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдем решения системы:

$$X = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot (-6) + 4 \cdot 18 \\ -3 \cdot (-6) + 3 \cdot 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x = 2$; $y = 3$.

Пример 4.2.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

Решение:

Запишем все коэффициенты и переменные системы в виде матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу, для начала проверим обратима ли матрица A, вычислив ее определитель:

$$\det A = -1 + 1 - 8 + 2 + 2 - 2 = -6 \neq 0$$

$\Rightarrow$ матрица невырожденная и имеет обратную.

Найдем алгебраические дополнения к каждому элементу матрицы:

$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$;

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-5; \qquad A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1; \quad A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=3;$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3; \quad A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3; \quad A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений и транспонируем ее:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ -5 & -1 & 3\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -5 & 3\\ -1 & -1 & 3\\ -3 & 3 & -3\end{pmatrix}.$$

Найдем решения системы:

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{-6}\cdot\begin{pmatrix}1 & -5 & 3\\ -1 & 1 & 3\\ -3 & 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-6\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$x_1=1$; $x_2=0$; $x_3=0$.

4.3. Решение системы уравнений методом Крамера

Определение:

Система n линейных уравнений с n неизвестными называется ***крамеровской***, если матрица A системы является невырожденной (т.е. $|A|\neq 0$).

Теорема (Крамера).

Крамеровская система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое находится по формулам (4.3):

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\; x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\; \ldots,\; x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad (4.3)$$

где Δ – определитель основной матрицы системы, Δ_j при j = 1,2,…, n – определитель матрицы, получаемый из матрицы A заменой j - го столбца столбцом свободных членов B.

Заметим, что способ решения системы линейных уравнений, основанный на данных формулах Крамера, называют ***методом, или правилом Крамера***.

Замечание.

Метод обратной матрицы и метод Крамера решения систем линейных уравнений становятся трудоёмкими при $n \geq 4$. Они удобны при решении в программах.

Пример 4.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ 5x - 2y - 2z = 3 \\ x + y - z = -2 \end{cases}.$$

Решение:

Для начала вычислим определитель основной матрицы данной системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6 - 4 + 5 + 2 + 6 + 10 = 25 \neq 0 =>$$

система имеет единственное решение.

Заменим первый столбец определителя системы столбцом свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 8 + 3 - 4 + 6 + 6 = 25.$$

Заменим второй столбец определителя системы столбцом свободных членов:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -9 - 6 - 10 - 3 - 12 + 15 = -25.$$

Заменим третий столбец определителя системы столбцом свободных членов:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 6 + 15 + 6 - 9 + 20 = 50.$$

Найдем решение системы по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{25}{25} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-25}{25} = -1; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{50}{25} = 2.$$

4.4. Решение системы уравнений методом Гаусса

Методом Гаусса (методом ***последовательного исключения неизвестных***) можно решить любую систему линейных уравнений. Процесс решения системы по методу Гаусса состоит из двух этапов.

На первом этапе (прямой ход) систему с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду (её расширенная матрица – ступенчатая).

На втором этапе (обратный ход) из ступенчатой системы последовательно, начиная с последнего уравнения, определяются значения неизвестных.

Эквивалентными (равносильными) преобразованиями системы линейных уравнений называются следующие действия:

1) перестановка местами двух уравнений системы,
2) умножение любого уравнения на число, отличное от нуля,
3) прибавление к одному из уравнений другого уравнения, умноженного на любое число,
4) удаление (вписывание) уравнения вида

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$.

На практике проделывают эквивалентные преобразования не над системой, а над её расширенной матрицей.

Проиллюстрируем применение метода Гаусса.

Пример 4.3.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ \quad - x_2 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 \quad - 2x_4 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение:

Выпишем расширенную матрицу $\tilde{A}$ и с помощью эквивалентных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -7 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1) \\ \\ + \\ + \end{array}$$

1-ю строку прибавляем к 3-й, а затем умножаем ее на (–1) и прибавим к 4-й

В дальнейшем 1-ю строку не трогаем, работаем со 2-й строкой.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (3) \\ + \\ + \end{array} \sim$$

Прибавляем 2-ю строку к 3-й, а затем прибавляем утроенную 2-ю строку к 4-й.

Далее первые две строки не трогаем, работаем с 3-й

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 3 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (7) \\ + \end{array} \sim$$

Умножаем 3-ю строку на 7 и прибавляем к 4-й.

Получаем ступенчатую матрицу

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 34 \end{array}\right)$$

Таким образом, в результате проведенных преобразований пришли к следующей системе линейных уравнений, равносильной данной:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ \quad - x_2 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 = 2, \\ \qquad\qquad\quad 17x_4 = 34. \end{cases}$$

Полученная система имеет единственное решение.

Путем выражения одной переменной через другую, найдем значения неизвестных. Начинаем с последнего уравнения:

Из последнего уравнения выражаем

$x_4 = 2$; из третьего

$x_3 = 2 - 2x_4 = -2$;

аналогично получаем все остальные переменные, т.е.

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = -2,\ x_4 = 2.$$

4.5. Задачи на самостоятельную подготовку

№1. Решить матричное уравнение вида $AX = B$, если:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$2)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

№2. Решить матричное уравнение вида $XA = B$, если:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -6\\ 0 & -8 & -6\end{pmatrix};$$

$$2)\ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

№3. Методом обратной матрицы решить системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases}2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0,\\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3,\\ 3x_1 + 5x_2 = 3\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}x_1 + x_2 + 4x_3 = 1,\\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 2,\\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 2\end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases}2x_1 + x_2 = 5,\\ x_1 + 3x_3 = 16,\\ 5x_2 - x_3 = 10\end{cases}\qquad 4)\ \begin{cases}2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7,\\ x_1 - 4x_2 = -5,\\ x_1 + x_2 + x_3 = -2\end{cases}$$

№4. Методом Крамера решить системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases}3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1,\\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3,\\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 2\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2,\\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2,\\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1\end{cases}$$

№5. Методом Гаусса решить системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases}2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20,\\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -3,\\ -5x_1 + x_2 - x_4 = -19,\\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5,\\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6,\\ x_1 + 5x_2 = -3\end{cases}$$

3) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 21 \end{cases}$

№6. Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найдите её решение:

	A	B	C
1.	$\begin{cases} x - y = -1, \\ 2x + y = 7; \end{cases}$	$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 3x + 3y + 3z = 9; \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 4x - 2y = c,\ c \in R; \end{cases}$
2.	$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = -1; \end{cases}$	$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0, \\ 4x - 3y + 3z = 0, \\ x + 3y = 0; \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 2x + y = c,\ c \in R; \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 0; \end{cases}$	$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 8x + 3y - 6z = 0, \\ 4x - y + 3z = 0; \end{cases}$	$\begin{cases} x - y + 2z = 5, \\ cx - 2y + 4z = 10,\ c \in R; \end{cases}$
4.	$\begin{cases} x - y = 1, \\ 2x - 2y = 2; \end{cases}$	$\begin{cases} 3x - y + 2z = 2, \\ 4x - 3y + 3z = 3, \\ 5x + 3z = 0, \\ x + 3y = 0; \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - y + 3z - 5t = 1, \\ x - y - 5z = 2, \\ 3x - 2y - 2z - 5t = 3, \\ 7x - 5y - 9z + 10t = 8; \end{cases}$
5.	$\begin{cases} x + y - z = -4, \\ x + 2y - 3z = 0, \\ -2y - 2z = 16; \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y + 3z - t = 8, \\ 2x + y - 4z + 3t = 1, \\ 4x - 7y + 18z - 11t = -13, \\ 3x + y - z + 2t = 9; \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - y + z + 2u + 3v = 2, \\ 6x - 3y + 2z + 4u + 5v = 3, \\ 6x - 3y + 4z + 8u + 13v = 9, \\ 4x - 2y + z + u + 2v = 4; \end{cases}$
6.	$\begin{cases} x + y - z = -4, \\ x + 2y - 3z = 0, \\ 2y + 2z = -3; \end{cases}$	$\begin{cases} 4x - 3y + 2z + 2t = 9, \\ 2x + 5y - 3z - t = 4, \\ 5x + 6y - 2z + t = 18; \end{cases}$	$\begin{cases} x + 4y + 2z = -1, \\ 2x + 3y - z = 3, \\ x - y - 3z = 4, \\ x - 6y - cz = 9; c \in R; \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x - y + z = 2, \\ x + 4y + 2z = 5; \end{cases}$	$\begin{cases} x + y + z - t = 3, \\ 2x - y + z + t = 2, \\ x + 4y + 2z + 2t = 5; \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = a, \\ 4x + 5y + 6z = b, \\ 5x + 6y + 7z = c, \end{cases}$ $a, b, c = const.$

Контрольные вопросы к Главе 4

1. Чем отличается однородная система от неоднородной?

2. В матричной записи системы $B=AX$ каково число столбцов в матрицах X и B ?

3. Что такое определитель системы?

4. Определение решения системы.

5. Какие системы называются совместными?

6. Можно ли использовать правило Крамера при решении системы трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными?

7. Можно ли использовать правило Крамера, если определитель системы равен нулю и почему?

8. Можно ли использовать метод Гаусса при решении системы трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными?

9. Изменяют ли эквивалентные преобразования расширенной матрицы в методе Гаусса решение системы?

10. Можно ли решать систему с помощью обратной матрицы, если определитель системы равен нулю и почему

ГЛАВА 5. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

5.1. Векторы. Основные понятия

Определение:

Отрезок прямой, концами которого служат точки A и B, называется ***направленным отрезком***, если указано, какая из этих двух точек является началом и какая – концом отрезка.

Определение:

Вектор– это направленный прямолинейный отрезок.

Обозначение вектора с началом в точке A и концом в точке B:

$\overline{AB}$, $\vec{AB}$.

Иногда направленный отрезок обозначается как $\bar{a}$, $\vec{a}$.

Вектор характеризуется ***длиной*** (модулем) $|\bar{a}|$ и *направлением*.

Определение:

Нулевой вектор – это вектор, начало и конец которого совпадают (т.е. точка).

Обозначается $\bar{0}$, либо **0**.

Нулевой вектор не имеет направления и длина его равна нулю.

Определение:

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным*** и обозначается $\bar{e}$.

Определение:

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются ***коллинеарными*** и обозначаются $\overline{a} \| \overline{b}$.

Определение:

Коллинеарные векторы могут быть ***одинаково (сонаправлены)*** **и** ***противоположно направлены***:

$$\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b},\ \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}.$$

Определение:

Два вектора называются ***равными***, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину:

$$\overline{a} = \overline{b} \ \Leftrightarrow\ \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b} \text{ и } |\overline{a}| = |\overline{b}|.$$

***Признак коллинеарности ненулевых векторов*:**

вектор $\overline{a}$ коллинеарен ненулевому вектору $\overline{b}$ тогда и только тогда, когда существует число k, удовлетворяющее условию

$\overline{a} = k \cdot \overline{b}$.

Определение:

Три вектора в пространстве называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или параллельны одной и той же плоскости.

Проекция вектора на ось. Свойства проекций

Определение:

Осью называется прямая с заданным началом отсчета и направлением (направление на рисунках указывается стрелкой).

Определение:

Проекцией точки *A* на ось *0u* называется точка A_1 пересечения оси и плоскости α, перпендикулярной этой оси и проходящей через точку A (рис. 5.1).

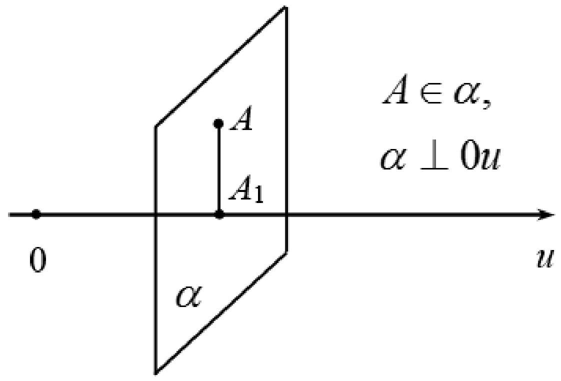


Рис. 5.1. Проекция точки *A* на ось *u*.

Определение:

Векторной проекцией вектор а $\bar{a} = \overline{AB}$ на ось *0u* называется вектор $\overline{A_1B_1}$, где A_1, B_1 – проекции точек *A*, *B* на ось *0u*.

Определение:

Числовой проекцией (или просто ***проекцией)*** вектора $\bar{a} = \overline{AB}$ на ось *0u* называется число, равное:

$\left|\overline{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось *0u* одинаково направлены (рис. 5.2, а);

$-\left|\overline{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось $0u$ направлены противоположно (рис. 5.2, б);

0, если $\overline{A_1B_1} = \overline{0}$.

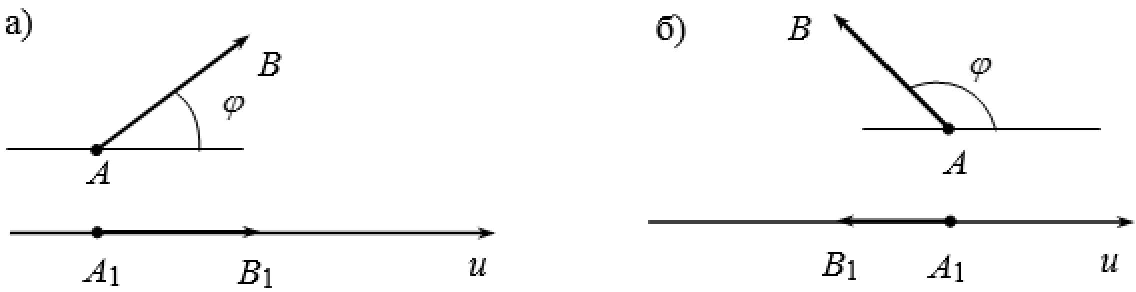


Рис. 5.2. Направления векторов

Обозначается проекция вектора на ось $0u$ символом: $\text{пр}_u\overline{a}$.

Из определения следует, что

$$\text{пр}_u\overline{a} = |\overline{a}|\cdot\cos\varphi, \tag{5.1}$$

где φ – угол между положительным направлением оси $0u$ и вектором $\overline{a}$.

Таким образом, если угол φ острый, то проекция вектора на ось положительна, если φ тупой угол, то проекция отрицательна; если $\varphi = 90^\circ$, то проекция равна нулю.

Определение:

Вектор $\overline{e}$ называется ***единичным***, если $|\overline{e}| = 1$.

Определение:

Единичный вектор $\overline{e}$, направление которого совпадает с направлением оси $0u$, называется ***направляющим вектором*** этой оси или ***ортом*** оси.

Если $\overline{a}_0$ – единичный вектор, сонаправленный с вектором $\overline{a}$, то

$\overline{a} = |\overline{a}|\cdot\overline{a}_0$,

если $\overline{a}_0$ направлен противоположно вектору $\overline{a}$, то $\overline{a} = -|\overline{a}|\cdot\overline{a}_0$.

Определение:

Рассмотрим проекции вектора $\bar{a} = (x; y)$ на оси координат:

$$np_x \bar{a} = x = |\bar{a}| \cos\alpha \text{, где } \alpha = \angle(Ox, \bar{a});$$

$$np_y \bar{a} = y = |\bar{a}| \cos\beta \text{, где } \beta = \angle(Oy, \bar{a});$$

в этом случае $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ называются ***направляющими косинусами*** вектора $\bar{a}$ (рис.5.3).

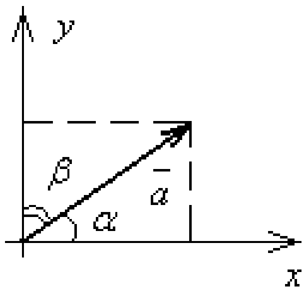


Рис. 5.3. Проекции вектора $\bar{a} = (x; y)$ на оси координат.

Свойства проекций

1°. Проекция на ось суммы векторов равна сумме проекций этих векторов, т.е.

$$\text{пр}_u(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n) = \text{пр}_u \bar{a}_1 + \text{пр}_u \bar{a}_2 + \ldots + \text{пр}_u \bar{a}_n. \quad (5.2)$$

2°. Проекция произведения вектора на число равна произведению этого числа на проекцию вектора, т.е.

$$\text{пр}_u(\lambda \bar{a}) = \lambda \text{пр}_u \bar{a}. \quad (5.3)$$

Доказательство:

Свойство 1°

Доказательство проведем для двух векторов (для большего числа аналогично).

Пусть $\bar{a} = \overline{AB},\ \bar{b} = \overline{BC},\ \bar{c} = \overline{AC},$

т.е. $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, тогда

$\overline{A_1C_1} = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1}$ (рис. 5.4),

но по определению проекции вектора и произведения вектора на число, получаем:

$\overline{A_1B_1} = (\text{пр}_u \bar{a})\bar{e},\ \overline{B_1C_1} = (\text{пр}_u \bar{b})\bar{e},\ \overline{A_1C_1} = (\text{пр}_u \bar{c})\bar{e},$

где $\bar{e}$ – единичный, направляющий вектор оси $0u$.

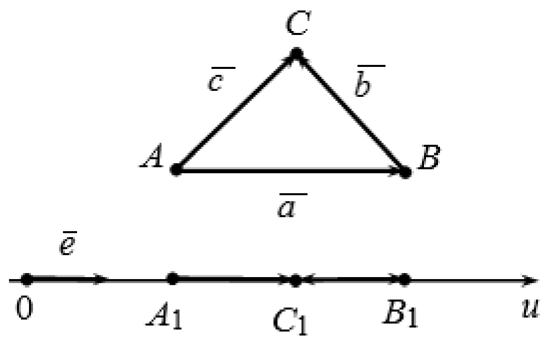


Рис. 5.4. Сложение векторов

Следовательно,

$(\text{пр}_u \bar{c}) \cdot \bar{e} = (\text{пр}_u \bar{a}) \cdot \bar{e} + (\text{пр}_u \bar{b}) \cdot \bar{e}, \quad (\text{пр}_u \bar{c}) \cdot \bar{e} = (\text{пр}_u \bar{a} + \text{пр}_u \bar{b})\bar{e},$

откуда

$\text{пр}_u \bar{c} = \text{пр}_u \bar{a} + \text{пр}_u \bar{b}$.

Свойство 2°

Если $\lambda > 0$ (рис. 5.5, а), то по формуле (5.1) получаем:

$$\text{пр}_u |\lambda\bar{a}| = |\lambda\bar{a}| \cdot \cos\varphi = |\lambda| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot |\bar{a}| \cdot \cos\varphi = \lambda \text{пр}_u \bar{a}.$$

Если $\lambda < 0$, то по формуле (5.1), используя формулу приведения $\cos(\pi - \psi) = -\cos\psi$, получаем (рис. 5,б):

$$\text{пр}_u|\lambda\bar{a}| = |\lambda\bar{a}|\cdot\cos\varphi = |\lambda|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos(\pi-\psi) = (-\lambda)\cdot|\bar{a}|\cdot(-\cos\psi) = \lambda\cdot|\bar{a}|\cdot\cos\psi = \lambda\text{пр}_u\bar{a}.$$

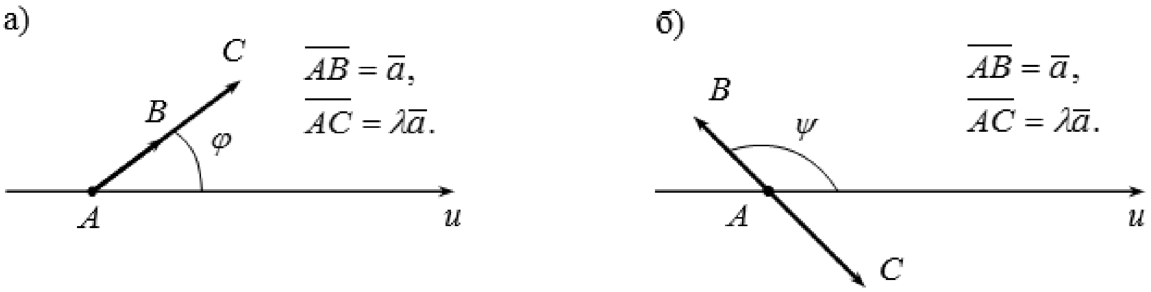


Рис. 5.5. Расположение векторов в зависимости от направления

5.2. Линейные операции над векторами

Определение:

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – два произвольных ненулевых вектора.

Суммой векторов называется вектор $\bar{a}+\bar{b}$, началом которого является начало первого вектора, а концом – конец второго (рис. 5.6).

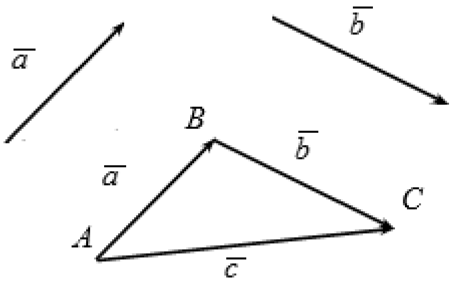


Рис. 5.6. Сумма двух векторов по правилу треугольника

Если точка A является началом вектора $\bar{a}$, то говорят что вектор $\bar{a}$ отложен от точки A. Отложим от точки A вектор $\overline{AB}$, равный $\bar{a}$. Затем от точки B отложим вектор $\overline{BC}$, равный $\bar{b}$.

Вектор $\overline{AC}$, равный $\bar{c}$, является ***суммой*** векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и обозначается:

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}.$$

Для любых трех точек A, B, C (рис. 5.7) справедливо равенство (правило треугольника):

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Правило треугольника можно обобщить на любое число слагаемых (правила замыкающей, рис. 5.7).

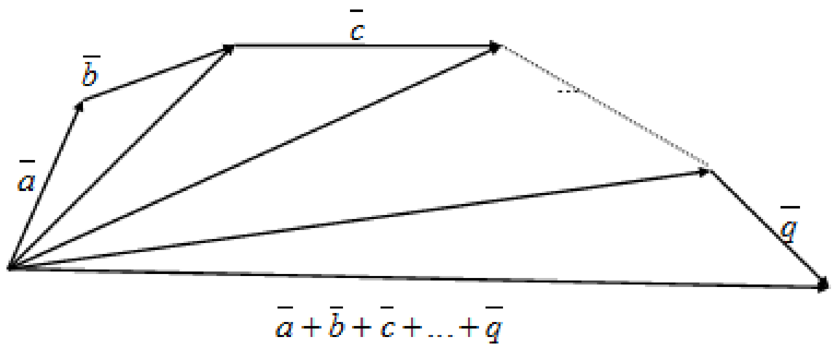


Рис. 5.7. Сумма произвольного числа векторов

Сумму двух векторов можно найти также по ***правилу параллелограмма***. Отметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, одна диагональ является суммой, а другая разностью $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 5.8).

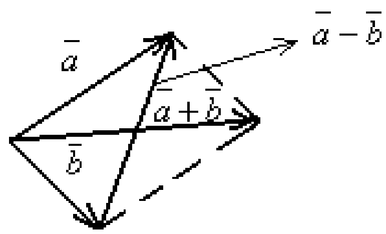


Рис. 5.8. Сумма двух векторов по правилу параллелограмма

Определение:

Умножение вектора на число и сложение векторов называются ***линейными операциями над векторами***.

Определение:

Два вектора называются ***противоположными***, если их длины равны, и они противоположно направлены.

Из определения произведения вектора на число следует, что

$$\overline{AB} = -\overline{BA} \text{ и } \overline{BA} = -\overline{AB}.$$

Определение:

Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, сумма которого с вектором $\bar{b}$ равна вектору $\bar{a}$ или, другими словами, сумму векторов $\bar{a}$ и $-\bar{b}$.

Обозначается:

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}.$$

Разность векторов можно определить также равенством:
$\bar{c} = \bar{a} + (-1)\bar{b}$.

Любой направленный отрезок при сложении с нулевым не изменяется.

Определение:

Произведением вектора $\bar{a}$ ***на вещественное число*** λ называется вектор $\bar{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\bar{b}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$;

2) $\bar{b}$ коллинеарен $\bar{a}$;

3) $\bar{b}$ и $\bar{a}$ направлены одинаково, если $\lambda > 0$, и противоположно, если $\lambda < 0$.

(Если же $\lambda = 0$, то из первого условия следует $\bar{b}$ = 0.)

Произведение вектора $\bar{a}$ на число λ обозначается $\lambda\bar{a}$ (рис. 5.9).

Приведенное определение определяет вектор $\lambda\bar{a}$ не единственным образом, но все удовлетворяющие ему векторы равны между собой.

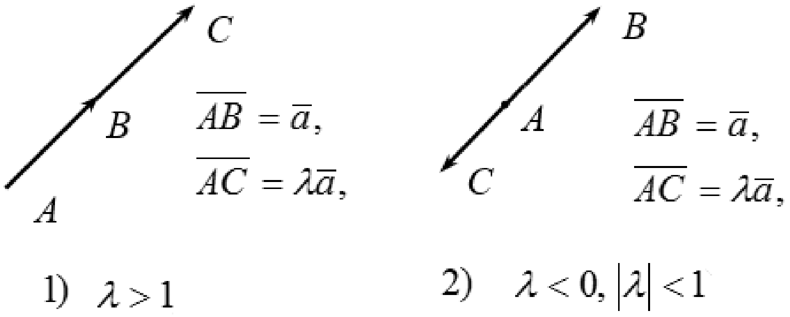


Рис. 5.9.Произведением вектора $\overline{a}$ на вещественное число λ.

Из определения произведения вектора на число следует утверждение 1.1.

Утверждение 1.1.

Если $\overline{a} \neq 0$, то любой вектор $\overline{b}$, коллинеарный $\overline{a}$, представляется в виде

$$\overline{b} = \pm \frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|} \overline{a}.$$

Знак «+» или «–» берут, смотря по тому, направлены $\overline{a}$ и $\overline{b}$ одинаково или нет.

Определение:

Совокупность всех направленных отрезков, для которых введены операции:

– сравнения;

– сложения;

– умножения на вещественное число,

называется ***множеством векторов.***

Конкретный элемент этого множества будем называть *вектором* и обозначать символом с чертой наверху, например $\overline{a}$.

Основные свойства линейных операций на множестве векторов

Для любых векторов $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ и любых вещественных чисел λ и μ, не равных нулю, выполняются следующие свойства.

1^0. ***Коммутативность сложения***

$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}.$

2^0. ***Ассоциативность сложения***

$\bar{a}+\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\left(\bar{a}+\bar{b}\right)+\bar{c}.$

3^0. ***Дистрибутивность***

$\lambda\left(\bar{a}+\bar{b}\right)=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}.$

4^0. ***Сложение с нулевым вектором***

$\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}.$

5^0. ***Сложение с противоположным вектором***

$\bar{a}+\left(-\bar{a}\right)=\bar{0}.$

6^0. ***Умножение на единицу***

$1\cdot\bar{a}=\bar{a}.$

Данные свойства следуют из определения множества векторов. В качестве примера приведем доказательство свойства коммутативности.

Пусть даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Совместим начала этих векторов и построим на них параллелограмм *ABDC* (рис. 5.10).

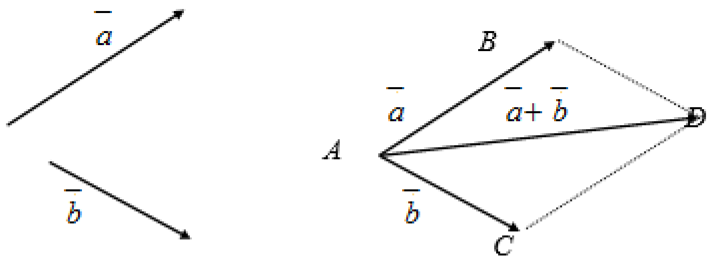


Рис. 5.10. Сложение векторов по правилу параллелограмма

Поскольку у параллелограмма противолежащие стороны параллельны и имеют равные длины, то $\overline{CD}=\overline{a}; \overline{BD}=\overline{b},$ но тогда, по правилу треугольника, из треугольников *ACD* и *ABD* следует, что

$\overline{AD}=\overline{b}+\overline{CD}; \overline{AD}=\overline{a}+\overline{BD}$, то есть

$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$.

Свойство доказано.

Применяя линейные операции, можно составлять суммы векторов, умноженных на числа: $\lambda_1 \overline{a_1}+\lambda_2 \overline{a_2}+\ldots+\lambda_n \overline{a_n}$.

Определение:

Выражения такого вида называются ***линейными комбинациями***. Числа, входящие в линейную комбинацию, называются ее коэффициентами.

Свойства линейных операций на множестве векторов позволяют преобразовывать линейные комбинации по обычным правилам алгебры: раскрывать скобки, приводить подобные члены, переносить некоторые члены в другую часть равенства с противоположным знаком и т. д.

Линейные комбинации обладают следующим очевидным свойством: если векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ коллинеарны, то любая их линейная комбинация им коллинеарна.

Если же они компланарны, то любая их линейная комбинация им компланарна. Это сразу следует из того, что вектор $\lambda\overline{a}$ коллинеарен $\overline{a}$, а сумма векторов компланарна слагаемым и коллинеарна им, если они коллинеарны.

Определение:

Множество называется ***замкнутым относительно некоторой операции***, если для любых элементов множества результат применения этой операции принадлежит данному множеству.

Определение:

Множество векторов, замкнутое относительно линейных операций, называется ***векторным пространством***.

Если одно векторное пространство является подмножеством другого, то оно называется его подпространством.

Таким образом, можно сказать, что множество всех векторов, параллельных данной прямой, и множество всех векторов, параллельных данной плоскости, являются векторными пространствами.

Чтобы различать эти два типа векторных пространств, их называют соответственно одномерными и двумерными пространствами.

Помимо упомянутых, существуют еще два векторных пространства: нулевое или нульмерное, состоящее только из нулевого вектора, и трехмерное – множество всех векторов пространства.

Нулевое пространство является подпространством для каждого другого, и каждое векторное пространство является подпространством для трехмерного.

Линейная зависимость векторов

Вектор $\overline{b}$ раскладывается по векторам $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$, если он представим как их линейная комбинация, то есть найдутся такие коэффициенты, что

$$\overline{b} = \beta_1 \overline{a_1} + \beta_2 \overline{a_2} + \ldots + \beta_n \overline{a_n}.$$

Возможны случаи, для которых вектор раскладывается по данной системе векторов, и при этом коэффициенты разложения определены неоднозначно.

Например, пусть вектор

$$\overline{b} = 2\overline{a_1} - \overline{a_2}.$$

При этом

$$\overline{a_1} + \overline{a_2} = \overline{a_3},$$

Тогда вектор $\overline{b}$ раскладывается так же, как

$$\bar{b} = 2\left(\overline{a_3} - \overline{a_2}\right) - \overline{a_2} = 2\overline{a_3} - 3\overline{a_2}.$$

Нулевой вектор раскладывается по любой системе векторов: например, можно взять линейную комбинацию этих векторов с нулевыми коэффициентами. Такая линейная комбинация называется ***тривиальной***.

Определение:

Система векторов $\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ \dots,\ \overline{a_n}$ называется ***линейно независимой***, если нулевой вектор раскладывается по ней единственным образом.

Иначе говоря, система векторов ***линейно независима***, если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору, или, подробнее, если из равенства

$$\lambda_1\,\overline{a_1} + \lambda_2\,\overline{a_2} + \dots + \lambda_n\,\overline{a_n} = 0$$

следует, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Система векторов $\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ \dots,\overline{a_n}$ ***линейно зависима***, если нулевой вектор раскладывается по ней не единственным образом, т. е. если найдутся такие коэффициенты $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_n$, что

$$\lambda_1\,\overline{a_1} + \lambda_2\,\overline{a_2} + \dots + \lambda_n\,\overline{a_n} = 0,$$

но не все они равны нулю:

$$\lambda_1^{\ 2} + \lambda_2^{\ 2} + \dots + \lambda_n^{\ 2} \neq 0.$$

Рассмотрим свойства линейно-зависимых и линейно-независимых систем векторов.

1°. Если среди векторов $\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ \dots,\overline{a_n}$, есть нулевой, то такая система линейно зависима.

2°. Система, содержащая один вектор, линейно зависима, если этот вектор нулевой.

3°. Если к линейно зависимой системе $\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ ...,\overline{a_n}$ добавить какие-то векторы $\overline{b_1},\ \overline{b_2},\ ...,\overline{b_s}$, то полученная система векторов будет линейно зависимой.

4°.Если в системе векторов какая-то часть линейно зависима, то вся система обязательно линейно зависима.

5°.Любая часть линейно независимой системы линейно независима.

Утверждение 1.2.

Если вектор x раскладывается по системе векторов $\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ ...,\overline{a_n}$, то это разложение единственно тогда и только тогда, когда система векторов линейно независима.

Утверждение 1.3.

Система из $k(k>1)$векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается по остальным.

Примем без доказательства следующую теорему.

Теорема 1.1.

1. Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда это − нулевой вектор.
2. Система из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны.
3. Система из трех векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы компланарны.
4. Любые четыре вектора линейно зависимы.

Определение:

Базисом в векторном пространстве называется упорядоченная линейно независимая система векторов такая, что любой вектор этого пространства раскладываетсяпо ней.

Из теоремы 1.1 следуют утверждения

1. В нулевом пространстве базиса не существует.

2. В одномерном пространстве (на прямой линии) базис состоит из одного ненулевого вектора.

3. В двумерном пространстве (на плоскости) базис − упорядоченная пара неколлинеарных векторов.

4. В трехмерном пространстве базис − упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Требование упорядоченности означает, что, например, в случае плоскости $\overline{e_1},\ \overline{e_2}$ и $\overline{e_2},\ \overline{e_1}$ − два разных базиса.

Так как векторы базиса линейно независимы, коэффициенты разложения по базису для каждого вектора пространства определены однозначно. Они называются ***компонентами*** или ***координатами вектора*** в этом базисе.

Таким образом, если $\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \overline{e_3}$ − базис трехмерного пространства, то по формуле

$$\overline{a} = \lambda_1\,\overline{e_1} + \lambda_2\,\overline{e_2} + \lambda_3\,\overline{e_3}$$

каждому вектору сопоставлена единственная упорядоченная тройка чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и каждой тройке чисел − единственный вектор.

Аналогично, вектор на плоскости имеет две компоненты, а на прямой − одну.

Компоненты пишутся в скобках после буквенного обозначения вектора, например $\overline{a} = \overline{e_1} - 2\,\overline{e_2} + 3\overline{e_3}$ или $\overline{a} = (1, -2\,, 3)$.

В аналитической геометрии геометрические рассуждения о векторах сводятся к вычислениям, в которых участвуют компоненты этих векторов. Следующее утверждение показывает, как производятся линейные операции над векторами, если известны их компоненты.

Утверждение 1.4.

1. При умножении вектора на число все его компоненты умножаются на это число.
2. При сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

Доказательство.

1. Пусть компоненты вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ равны

$$\overline{a} = \lambda_1 \overline{e_1} + \lambda_2 \overline{e_2} + \lambda_3 \overline{e_3}$$

$$k\overline{a} = k\left(\lambda_1 \overline{e_1} + \lambda_2 \overline{e_2} + \lambda_3 \overline{e_3}\right) = (k\lambda_1)\overline{e_1} + (k\lambda_2)\overline{e_2} + (k\lambda_3)\overline{e_3}.$$

2. Пусть компоненты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в базисе $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ равны

$$\overline{a} = \lambda_1 \overline{e_1} + \lambda_2 \overline{e_2} + \lambda_3 \overline{e_3}, \quad \overline{b} = \beta_1 \overline{e_1} + \beta_2 \overline{e_2} + \beta_3 \overline{e_3}$$

$$\overline{a} + \overline{b} = \lambda_1 \overline{e_1} + \lambda_2 \overline{e_2} + \lambda_3 \overline{e_3} + \beta_1 \overline{e_1} + \beta_2 \overline{e_2} + \beta_3 \overline{e_3} =$$
$$= (\lambda_1 + \beta_1)\overline{e_1} + (\lambda_2 + \beta_2)\overline{e_2} + (\lambda_3 + \beta_3)\overline{e_3}.$$

Для одномерного и двумерного пространств доказательство отличается только числом слагаемых.

5.3. Прямоугольная и полярная системы координат

Определение:

Система координат на плоскости – это способ, который позволяет численно описать положение точки на плоскости. Одной из таких систем является ***прямоугольная (декартова)*** система координат.

Определение:

Каждой точке на плоскости ставилась в соответствие пара чисел x и y, называемая ее ***координатами***.

Определение:

Расстояние d между точками $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ на плоскости:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,. \qquad (5.4)$$

Деление отрезка в данном отношении

Даны точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$.

Координаты точки $M(x;y)$, делящей отрезок AB в отношении $AM:MB=\lambda$, определяются по формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (5.5)$$

В частности, при делении пополам, т.е. в отношении $1:1$,

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2}. \qquad (5.6)$$

Определение:

Зафиксируем в пространстве точку О и рассмотрим произвольную точку М. ***Радиус − вектором*** точки М по отношению к точке О называется вектор ОМ. Если в пространстве кроме точки О выбран некоторый базис, то точке М сопоставляется упорядоченная тройка чисел − компоненты ее радиус − вектора.

Определение:

Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса.

Точка носит название ***начала координат***. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат; первая − *осью абсцисс*, вторая − *осью ординат*, третья − *осью аппликат*. Плоскости, проходящие через оси координат, называются координатными плоскостями.

Пусть дана декартова система координат:

$O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}.$

Компоненты x, y, z радиус − вектора ОМ точки М называются координатами точки М в данной системе координат:

$$\overline{OM} = x\,\overline{e_1} + \mathrm{y}\,\overline{e_2} + \mathrm{z}\;\overline{e_3}.$$

Первая координата называется *абсциссой*, вторая −*ординатой*, а третья − *аппликатой*.

Координаты точки, как и компоненты вектора, − величины безразмерные. В частности, они не зависят от выбранной единицы измерения длин.

При заданной системе координат координаты точки определены однозначно. С другой стороны, если задана система координат, то для каждой упорядоченной тройки чисел найдется единственная точка, имеющая эти числа в качестве координат. Система координат на плоскости определяет такое же соответствие между точками плоскости и парами чисел. Задание системы координат на прямой линии сопоставляет каждой точке вещественное число и каждому числу − точку.

Рассмотрим задачу.

Даны 2 точки в пространстве A и B, координаты которых относительно некоторой декартовой системы координат $O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ соответственно равны

$A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$.

Найти компоненты вектора $\overline{AB}$.

Решение:

Очевидно, что

$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ (рис. 5.11).

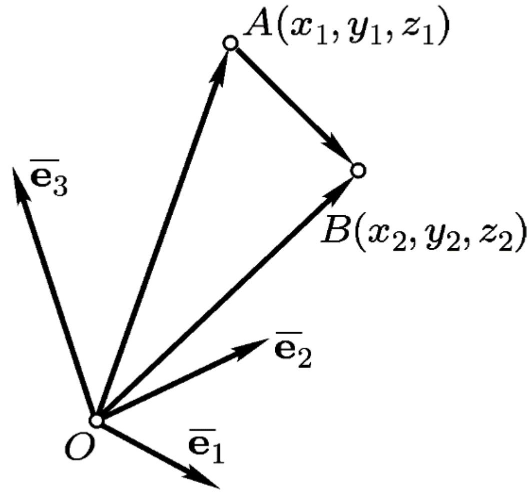


Рис. 5.11. Вектор $\overline{AB}$ в базисе $O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

Компоненты радиус-векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ по определению координат равны:

$\overline{OA} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\overline{OB} = (x_2; y_2; z_2)$.

Из утверждения 1.4. следует, что вектор $\overline{AB}$ имеет компоненты

$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Итак, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1.5.

Чтобы найти координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.

Деление отрезка в заданном отношении

Пример 5.1.

Постановка задачи.

Дано: $A(x_1;\, y_1;\, z_1), B(x_2;\, y_2;\, z_2)$.

Необходимо найти координаты точки M на отрезке AВ, которая делит этот отрезок в отношении $\frac{\lambda}{\beta}$ (рис. 5.12), т. е. удовлетворяет условию

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{\lambda}{\beta}, \lambda > 0, \beta > 0. \qquad (5.7)$$

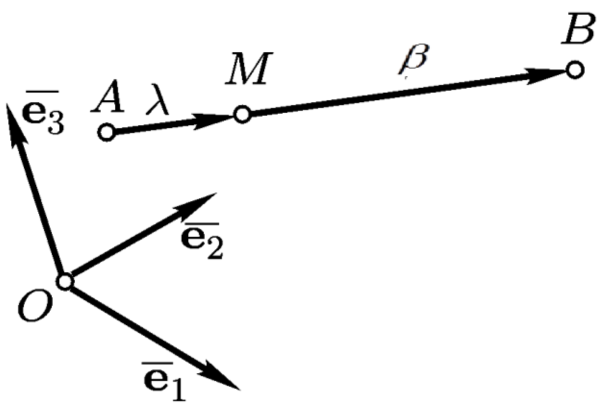


Рис. 5.12. Деление отрезка AB в отношении $\frac{\lambda}{\beta}$.

Решение:

Пусть точка M имеет координаты M (x; y; z). Запишем условие (5.7) в виде

$$\lambda \cdot \overline{AM} = \beta \cdot \overline{MB} \qquad (5.8)$$

Найдем компоненты векторов $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$ по утверждению 1.5.

$$\overline{AM} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$$

$$\overline{MB} = (x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z).$$

Разложим обе части равенства по базису

$$\lambda(x-x_1)=\beta(x_2-x);\lambda(y-y_1)=\beta(y_2-y);\lambda(z-z_1)=\beta(z_2-z)$$

Из полученных равенств найдем координаты точки М:

$$x=\frac{\beta\cdot x_1+\lambda\cdot x_2}{\lambda+\beta};\quad y=\frac{\beta\cdot y_1+\lambda\cdot y_2}{\lambda+\beta};\quad z=\frac{\beta\cdot z_1+\lambda\cdot z_2}{\lambda+\beta} \qquad (5.9)$$

Если в формулах (5.9) одно из чисел λ или β отрицательно, тогда из равенства (5.8) следует, что *M* находится на той же прямой вне отрезка *AB*, деля его в отношении $\left|\frac{\lambda}{\beta}\right|$.

Поэтому из формул (5.9) можно найти координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении как внутренним, так и внешним образом.

На плоскости и на прямой линии задача о делении отрезка решается точно так же, только из трех равенств в (5.9) остается соответственно два и одно равенство.

Определение:

Базис называется ***ортонормированным***, если его векторы попарно ортогональны и по длине равны единице.

Определение:

Декартова система координат, базис которой ортонормирован, называется ***декартовой прямоугольной системой координат***.

Нетрудно проверить, что координаты точки относительно декартовой прямоугольной системы координат в пространстве по абсолютной величине равны расстояниям от этой точки до соответствующих координатных плоскостей. Они имеют знак плюс или минус в зависимости от того, лежит точка по ту же или по другую сторону от плоскости, что и конец базисного вектора, перпендикулярного этой плоскости.

Аналогично находят координаты точки относительно декартовой прямоугольной системы координат на плоскости.

В ортонормированном базисе на плоскости базисные векторы будем обозначать $\bar{i}$ и $\bar{j}$ ($|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$ и $\bar{i} \perp \bar{j}$).

Разложение вектора $\bar{a} = (a_x; a_y)$ по базису $\bar{i}$ и $\bar{j}$ имеет вид

$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}$.

Если на плоскости взят базис $\bar{i}$ и $\bar{j}$, то он образует ***прямоугольную декартову систему координат***. Точка ноль принимается за начало координат, ось Ox называется *осью абсцисс*, ось Oy – *осью ординат*.

Определение:

Если вектор выходит из начала координат, он называется ***радиус-вектором***.

Для произвольной точки $M(x; y)$:

$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} \Rightarrow \overline{OM} = (x; y)$.

Определение:

Векторным базисом пространства называют тройку неколлинеарных векторов, взятых в определенном порядке.

Его берут ортонормированным, т.е. базисные векторы единичны и взаимно перпендикулярны.

Обозначение:

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Пример 5.2. Даны векторы:

$$\bar{a} = (1, 2, 3), \bar{b} = (-1, 0, 3), \bar{c} = (2, 1, -1), \ \bar{d} = (3, 2, 2\ )$$

в некотором базисе. Показать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе.

Решение:

Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если определитель Δ, составленный из координат векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, не равен нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Итак, показали, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис.

Найдем координаты вектора $\bar{d}$ относительно базиса $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, т.е. числовые коэффициенты α_1, α_2, α_3 разложения

$\bar{d} = \alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b} + \alpha_3 \bar{c}$.

Имеем

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

В силу определения равенства векторов и определения операций сложения векторов и умножения вектора на число, когда известны координаты векторов относительно некоторого базиса, последнее векторное равенство можно записать в виде системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2-2) + 12 = -1.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 15 - 4 = 7.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 2 + 18 = 10.$$

Получим решение системы:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{4},\ \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4},\ \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -2\frac{1}{2}.$$

Итак, имеем:

$$\overline{d} = \left(-\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}, -2\frac{1}{2}\right).$$

Пример 5.3.

Даны векторы:

$$\overline{a} = (3, -2, 1), \overline{b} = (-1, 1, -2), \overline{c} = (2, 1, -5),\ \overline{d} = (11, -6, 5\ )$$

в некотором базисе. Показать, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе.

Решение.

Составим определитель Δ из координат векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и вычислим его разложением, например, по первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-3+2) + 2 \cdot (3+4) + (-1-2) = 8.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис.

Найдем координаты вектора $\bar{d}$ относительно базиса $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, т.е. числовые коэффициенты α_1, α_2, α_3 разложения

$$\bar{d} = \alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b} + \alpha_3 \bar{c}$$

или

$$\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Полученное векторное равенство можно записать в виде системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 11; \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -6; \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 5. \end{cases}$$

Решая эту систему, например, по формулам Крамера, находим:

$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 1.$

$$\bar{d} = 2\bar{a} - 3\bar{b} + \bar{c}.$$

Декартовы системы координат не единственный способ определять при помощи чисел положение точки на плоскости. Для этого используются многие другие типы координатных систем.

Определение:

Другой практически важной системой координат на плоскости является полярная. Она задается точкой *O*, называемой ***полюсом***, лучом *Op*, называемым ***полярной осью*** и единичным вектором $\bar{e}$ того же направления, что и луч *Op* (рис. 5.13).

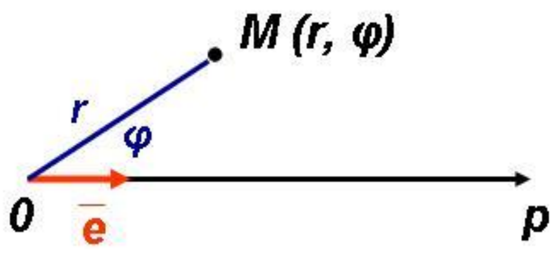


Рис. 5.13. Полярная система координат.

Положение произвольной точки M (не совпадающей с *O*) определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью (направление против часовой стрелки считается положительным).

Числа r и φ называются **полярными координатами** точки M.

Обозначение: $M(r,\varphi)$.

Полярный угол измеряется в радианах и отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки.

У полюса $r=0$, а угол φ не определен. У остальных точек $r>0$, а угол φ определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π. Это означает, что пары чисел вида $(r,\varphi+2\pi k)$, где $k\in Z$, представляют собой полярные координаты одной и той же точки.

Иногда ограничивают изменение полярного угла какими-нибудь условиями, например, $0\le\varphi<2\pi$ или $-\pi<\varphi\le\pi$. Это устраняет неоднозначность, но зато вводит другие неудобства.

Выберем на плоскости декартову прямоугольную систему координат, поместив ее начало в полюс О и приняв за базис векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ единичной длины, направленные соответственно вдоль полярной оси и под углом $\frac{\pi}{2}$ к ней (угол отсчитывается против часовой стрелки).

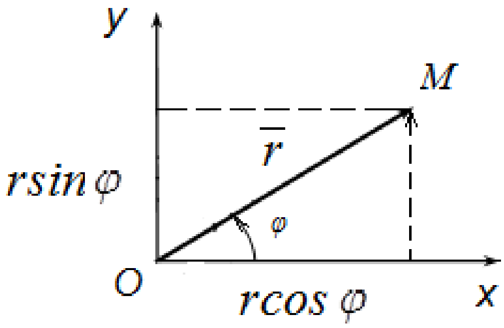


Рис. 5.14. Связь между декартовой и полярной системами координат.

Выразим декартовы координаты точки Мчерез ее полярные координаты. Для этого рассмотрим треугольник *ОКМ* (рис. 5.14), получаем формулы

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{5.10}$$

В таком случае справедливы следующие равенства

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ tg\,\varphi = \dfrac{y}{x}, \, если \; x \neq 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

Определяя величину y, следует установить (по знакам *x* и *y*) четверть, в которой лежит этот угол и учесть, что $0 \le \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$).

Пример 5.4.

Один конец отрезка AB длины r перемещается по оси абсцисс, а другой − по оси ординат. Найти уравнение линии, описываемой серединой этого отрезка.

Решение:

Пусть $M(x;\, y)$ – середина отрезка (рис. 5.15).

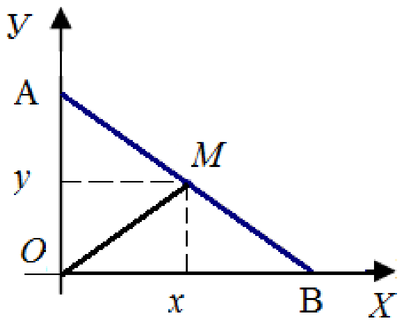


Рис. 5.15. Иллюстрация к задаче 5.4.

Длина отрезка OM (как длина медианы в соответствующем прямоугольном треугольнике) равна половине гипотенузы, то есть

$$OM = \frac{r}{2}.$$

С другой стороны

$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ (расстояние от точки M до начала системы координат).

Таким образом, приходим куравнению

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{r}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{r^2}{4}.$$

Получили уравнение, которое определяет окружность радиуса $\frac{r}{2}$ с центром в начале системы координат.

Цилиндрические и сферические координаты

В пространстве обобщением полярных систем координат являются цилиндрические и сферические системы координат. И для тех, и для других фигура, относительно которой определяется положение точки, состоит из точки О, луча *l*, исходящего из О, и вектора $\overline{n}$, равного по длине единице и перпендикулярного к *l*. Через точку О проведем плоскость γ, перпендикулярную вектору $\overline{n}$. Луч *l* лежит в этой плоскости.

Пусть дана точка *М*. Опустим из нее перпендикуляр *ММ*' на плоскость γ.

Цилиндрические координаты точки *М* − это три числа $(r;\varphi;h)$ (рис. 5.16).

Числа r и φ — полярные координаты точки *М'* по отношению к полюсу О и полярной оси *l*, а h — компонента вектора *М'М* по вектору $\overline{n}$.

Она определена, так как эти векторы коллинеарны.

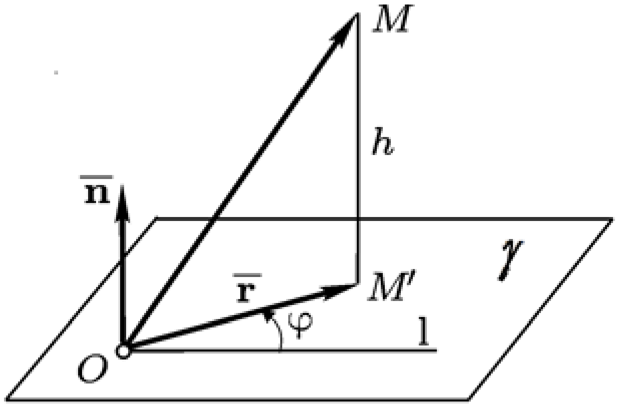


Рис. 5.16. Цилиндрическая система координат

Сферические координаты точки φ три числа $(r;\varphi;\theta)$. Они определяются следующим образом: r = |*OM*|. Как и для цилиндрических координат, φ − угол, образованный вектором *OM'* с лучом *l*, а в − угол вектора *OM* с плоскостью γ (рис. 5.17).

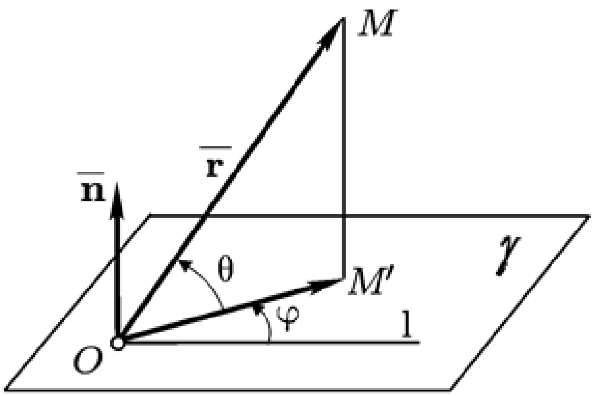


Рис. 5.17. Сферическая система координат

5.4. Скалярное произведение и его свойства

Угол между векторами определяется, как угол между векторами, равными данным и имеющими общее начало. В некоторых случаях указывается, от какого вектора и в каком направлении угол отсчитывается. Если такого указания не сделано, углом между векторами считается тот из углов, который не превосходит π. Если угол прямой, то векторы называются ортогональными.

Определение:

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется **число**, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Необходимо отметить следующее: скалярное произведение может быть определено только в случае, если выбрана определенная единица измерения длин векторов. В противном случае, приведенное выше определение не имеет смысла.

Определение:

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначение: $\bar{a}\cdot\bar{b}$ или $(\bar{a},\bar{b})$.

Таким образом, по определению

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi, \tag{5.12}$$

где φ угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

По формуле (5.6)

$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|\cdot\cos\varphi, \quad \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\cdot\cos\varphi,$

т.е.

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\cdot\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}. \tag{5.13}$$

Свойства скалярного произведения векторов

($\bar{a}$ и $\bar{b}$ ненулевые векторы)

1) $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$ *(коммутативность)*;
2) $(k\bar{a})\cdot\bar{b} = k(\bar{a}\cdot\bar{b}) = \bar{a}\cdot(k\bar{b})$ *(ассоциативность)*;
3) $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$ *(дистрибутивность)*;
4) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины
$\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$

5) Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда вектора перпендикулярны, т.е.

$\bar{a}\cdot\bar{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi$ прямой угол, $\bar{a}\perp\bar{b}$,

$\bar{a}\cdot\bar{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi$ острый угол,

$\bar{a}\cdot\bar{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi$ тупой угол.

Скалярное произведение в координатах (на плоскости):

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2, \text{ если } \bar{a} = (x_1, y_1),\ \ \bar{b} = (x_2, y_2). \tag{5.14}$$

Скалярное произведение в координатах (в пространстве):

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \text{ если } \bar{a} = (x_1; y_1; z_1), \bar{b} = (x_2; y_2; z_2). \tag{5.15}$$

Основные приложения скалярного произведения

1. Вычисление угла между векторами

Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}, \qquad (5.16)$$

где φ − угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

2. Вычисление проекции одного вектора на другой

$$\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

3. Условие перпендикулярности векторов

Используя свойство 5° и формулу (5.15), получаем:

$$\overline{a}\perp\overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a}\cdot\overline{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Свойства ортонормированного базиса

Векторы ортонормированного базиса $\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \overline{e_3}$ удовлетворяют равенствам

1) $\overline{e_1}\cdot\overline{e_2} = \overline{e_2}\cdot\overline{e_3} = \overline{e_3}\cdot\overline{e_1} = 0;$

2) $\overline{e_1}\cdot\overline{e_1} = \overline{e_2}\cdot\overline{e_2} = \overline{e_3}\cdot\overline{e_3} = 0.$

Утверждение 1.6. Если базисные векторы попарно ортогональны, то компоненты любого вектора $\overline{a} = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ (рис. 5.18) находятся по формулам

$$\alpha_1 = \frac{\overline{a}\cdot\overline{e_1}}{|\overline{e_1}|^2}, \alpha_2 = \frac{\overline{a}\cdot\overline{e_2}}{|\overline{e_2}|^2}, \alpha_3 = \frac{\overline{a}\cdot\overline{e_3}}{|\overline{e_3}|^2}.$$

В частности, если базис ортонормированный

$\alpha_1 = \overline{a}\cdot\overline{e_1}, \alpha_2 = \overline{a}\cdot\overline{e_2}, \alpha_3 = \overline{a}\cdot\overline{e_3}$ и

$$\overline{a}=(\overline{a}\cdot\overline{e_1})\overline{e_1}+(\overline{a}\cdot\overline{e_2})\overline{e_2}+(\overline{a}\cdot\overline{e_3})\overline{e_3}.$$

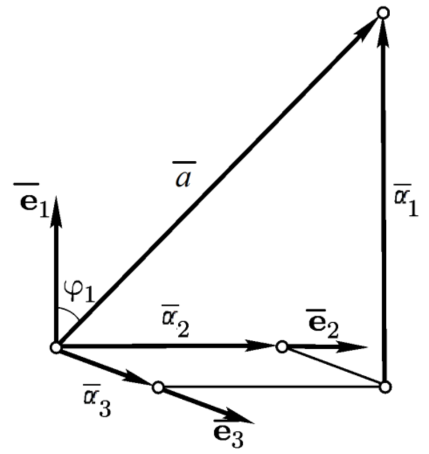


Рис. 5.18. Разложение вектора $\overline{a}$ по ортонормированному базису $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$.

Пример 5.5.

Найдите скалярное произведение векторов

$(5\overline{a}+3\overline{b})\cdot(2\overline{a}-\overline{b})$, если $|\overline{a}|=2, |\overline{b}|=3, \overline{a}\perp\overline{b}$.

Решение:

Преобразуем исходное выражение

$$(5\overline{a}+3\overline{b})\cdot(2\overline{a}-\overline{b})=10\overline{a}\cdot\overline{a}-5\overline{a}\cdot\overline{b}+6\overline{b}\cdot\overline{a}-3\overline{b}\cdot\overline{b}=$$
$$=10|\overline{a}|^2-5\overline{a}\cdot\overline{b}+6\overline{a}\cdot\overline{b}-3|\overline{b}|^2=10|\overline{a}|^2+\overline{a}\cdot\overline{b}-3|\overline{b}|^2.$$

$$\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}|^2=2^2=4; \overline{b}\cdot\overline{b}=|\overline{b}|^2=3^2=9; \overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Итак, имеем:

$$(5\overline{a}+3\overline{b})\cdot(2\overline{a}-\overline{b})=10|\overline{a}|^2-3|\overline{b}|^2=40-27=13.$$

Ответ: 13.

Пример 5.6.

Найдите угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$,

если $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}, \overline{b} = 6\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}.$

Решение:

Используем для нахождения угла между векторами формулу:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Имеем,

$\overline{a} = (1, 2, 3), \overline{b} = (6, 4, -2).$

$\overline{a} \cdot \overline{b} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 8,$

$|\overline{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14},$

$|\overline{b}| = \sqrt{6^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{56}.$

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}} = \frac{8}{\sqrt{4 \cdot 14 \cdot 14}} = \frac{2}{7},$$

$$\varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

Ответ: $\varphi = \arccos\frac{2}{7}.$

Пример 5.7.

Найдите скалярное произведение векторов $(3\overline{a} - \overline{b}) \cdot (3\overline{a})$, если $|\overline{a}| = \frac{2}{3}, |\overline{b}| = 1, \overline{a} \wedge \overline{b} = \frac{\pi}{3}.$

Решение:

Преобразуем исходное выражение

$$\left(3\bar{a}-\bar{b}\right)\cdot\left(3\bar{a}\right)=9\bar{a}\cdot\bar{a}-3\bar{b}\cdot\bar{a}=$$

$$=9\left|\bar{a}\right|^2-3\bar{a}\cdot\bar{b}=9\left|\bar{a}\right|^2-3\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\cos\left(\bar{a}\wedge\bar{b}\right).$$

Итак, имеем:

$$\left(3\bar{a}-\bar{b}\right)\cdot\left(3\bar{a}\right)=9\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\cdot\frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{3}=4-1=3.$$

Ответ: 3.

Пример 5.8.

Найдите такое значение m, при котором векторы $\bar{a}=m\bar{i}+\bar{j}$ и $\bar{b}=3\bar{i}-3\bar{j}-4\bar{k}$ перпендикулярны.

Решение:

Известно, что, если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

Найдем скалярное произведение векторов:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=3m-3,\ \bar{a}\perp\bar{b}\Rightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0\Rightarrow 3m-3=0\Rightarrow m=1.$$

Ответ: 1.

Пример 5.9.

Найдите скалярное произведение векторов $2\bar{a}+3\bar{b}+4\bar{c}$ и $5\bar{a}+6\bar{b}+7\bar{c}$, если $\left|\bar{a}\right|=1,\quad\left|\bar{b}\right|=2,\quad\left|\bar{c}\right|=3,\quad\bar{a}\wedge\bar{b}=\bar{a}\wedge\bar{c}=\bar{b}\wedge\bar{c}=\frac{\pi}{3}.$

Решение:

$$\left(2\bar{a}+3\bar{b}+4\bar{c}\right)\cdot\left(5\bar{a}+6\bar{b}+7\bar{c}\right)=$$

$$=10\bar{a}\cdot\bar{a}+12\bar{a}\cdot\bar{b}+14\bar{a}\cdot\bar{c}+15\bar{a}\cdot\bar{b}+18\bar{b}\cdot\bar{b}+21\bar{b}\cdot\bar{c}+20\bar{c}\cdot\bar{a}+24\bar{b}\cdot\bar{c}+28\bar{c}\cdot\bar{c}=$$

$$=10\bar{a}^2+27\bar{a}\cdot\bar{b}+34\bar{a}\cdot\bar{c}+18\bar{b}^2+45\bar{b}\cdot\bar{c}+28\bar{c}^2=$$

$$=10\left|\bar{a}\right|^2+27\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cos\left(\bar{a}\wedge\bar{b}\right)+34\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{c}\right|\cos\left(\bar{a}\wedge\bar{c}\right)+18\left|\bar{b}\right|^2+45\left|\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{c}\right|\cos\left(\bar{b}\wedge\bar{c}\right)+28\left|\bar{c}\right|^2.$$

$$\left(2\bar{a}+3\bar{b}+4\bar{c}\right)\cdot\left(5\bar{a}+6\bar{b}+7\bar{c}\right)=$$
$$=10+54\cos\frac{\pi}{3}+102\cos\frac{\pi}{3}+72+270\cos\frac{\pi}{3}+252=547.$$

Ответ: 547.

Пример 5.10.

На материальную точку действуют силы

$$\overline{f_1}=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k};\ \overline{f_2}=-\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k};\ \overline{f_3}=\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}\,.$$

Найдите работу равнодействующей этих сил R при перемещении точки из положения A(2;-1;0) в положении B(4;1;-1).

Решение:

Найдем равнодействующую R, как сумму векторов

$\overline{f_1},\ \overline{f_2},\ \overline{f_3}$:

$$\bar{R}=\overline{f_1}+\overline{f_2}+\overline{f_3}=\left(2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}\right)+\left(-\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}\right)+\left(\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}\right)=$$
$$=2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}.$$

Вектор перемещения

$$\bar{s}=\overline{AB}=\left(4-2\right)\bar{i}+\left(1+1\right)\bar{j}+\left(-1-0\right)\bar{k}=2\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$$

Искомую работу найдем как скалярное произведение силы на перемещение:

$$A=\bar{R}\cdot\bar{s}=2\cdot2+2\cdot2+1\cdot\left(-1\right)=7.$$

Ответ: 7.

Пример 5.11.

Даны вершины треугольника A(3; 2; 3), B(5; 1; 1) и C(1; 2; 1). Найдите внутренний угол при вершине A.

Решение. Согласно условию задачи, искомый угол φ есть угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. По координатам концов найдем эти векторы

$\overline{AB} = (5-3;1-2;1-3) = (2;-1;-2)$,

$\overline{AC} = (1-3;2-2;1-3) = (-2;0;-2)$.

Найдем длины векторов:

$|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$,

$|\overline{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Найдем скалярное произведение векторов:

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2 \cdot (-2) + 0 - 2 \cdot (-2) = 0$.

Применяя теперь формулу

$\cos\varphi = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}$, получим

$\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$.

5.5. Векторное произведение и его свойства

В пространстве в качестве базиса рассматриваем единичные взаимно перпендикулярные вектора $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ($|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$, $\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}$), которые образуют в пространстве правую тройку (т.е. после приведения их к общему началу из конца третьего вектора $\bar{k}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{i}$ ко второму $\bar{j}$ виден совершающимся против часовой стрелки).

В противном случае, тройка векторов называется левой.

*Векторным произведением*вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) длина вектора $\vec{c}$ вычисляется по формуле:

$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$, где $\varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b})$ (т.е. численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах);

2) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку.

Обозначение: $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ или $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$.
(рис.5.19).

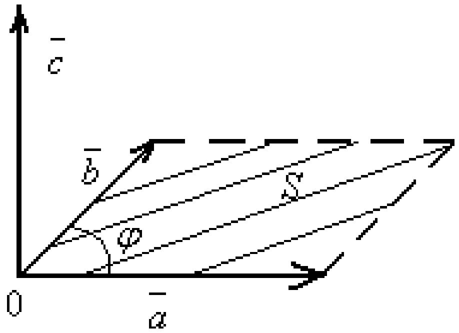


Рис. 5.19. Векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равное вектору $\bar{c}$.

Из определения векторного произведения непосредственно вытекают следующие соотношения между ортами $\bar{i}, \bar{j}$ и $\bar{k}$:

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}.$$

Свойства векторного произведения векторов

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, т.е. $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$.

2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т.е.
$\lambda \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda \bar{b})$.

3. Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю ($\bar{0}$).

$\bar{a} \| \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \times \bar{b} = 0$.

4. Векторное произведение обладает *распределительным свойством*:
$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$.

5. *Площадь параллелограмма со сторонами* a *и* b, т.е.
$S_{пар} = |\bar{a} \times \bar{b}|$, следовательно,

$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$.

6. *Векторное произведение через координаты.*

Пусть заданы два вектора:

$\bar{a} = (x_1, y_1, z_1), \ \bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Основные приложения векторного произведения

1. Вычисление площади треугольника (параллелограмма). Из курса математики средней школы известно, что площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними**,** что совпадает с половиной модуля векторного произведения векторов, которые построены на сторонах треугольника. Таким образом,

$$S = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}| \qquad (5.17)$$

где S площадь треугольника с вершинами в точках A, B, C, $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AC}$ (рис. 5.20).

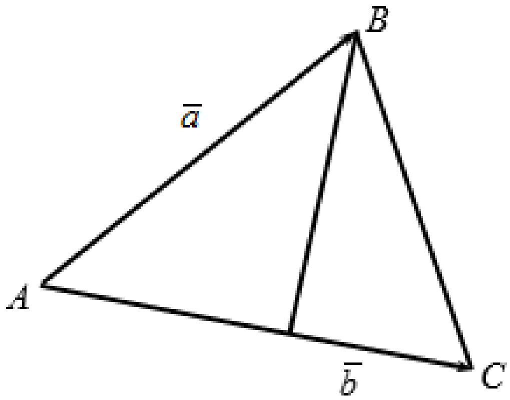


Рис. 5.20.Треугольник, образованный векторами

2. Вычисление высоты треугольника (параллелограмма).

   Вычислим площадь треугольник двумя способами:

$$S = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$$

где h – высота треугольника, опущенная из вершины B (рис. 5.20).

Из этого равенства получаем:

$$h = \frac{\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right|}$$

Пример 5.12.

Найти векторное произведение векторов

$\bar{a} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$.

Решение.

$\bar{a} =$ (2, 5, 1); $\bar{b} =$ (1, 2, -3).

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\bar{i} + 7\bar{j} - \bar{k}.$$

Ответ: $\bar{a} \times \bar{b} = -17\bar{i} + 7\bar{j} - \bar{k}.$

Пример 5.13.

Вычислить площадь треугольника с вершинами

A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

Решение:

Воспользуемся формулой

$$S = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|.$$

$$\bar{a} = \overline{AB} = (4-2;0-2;3-2) = (2;-2;1),$$

$$\bar{b} = \overline{AC} = (0-2;1-2;0-2) = (-2;-1;-2).$$

$$\overline{AC} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(-1-4) - \bar{j}(-2+4) + \bar{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\bar{j} + 6\bar{k}.$$

$$\left|\overline{AC} \times \overline{AB}\right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}.$$

$$S_\Delta = \frac{\sqrt{65}}{2}\,(\text{ед}^2).$$

Ответ: $S_\Delta = \frac{\sqrt{65}}{2}\,(\text{ед}^2)$.

Пример 5.14.

Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(3, 2, 1)$ и высоту, опущенную из вершины B на сторону AC.

Решение:

Пусть $\bar{a} = \overline{AB}, \bar{b} = \overline{AC}$, тогда

$$\bar{a} = (1-1, 2-1, 3-1) = (0, 1, 2),$$

$$\bar{b} = (3-1,\ 2-1,\ 1-1) = (2,1,0).$$

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0-2)\bar{i} - (0-4)\,\bar{j} + (0-2)\bar{k} = -2\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k},$$

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = \sqrt{4+16+4} = 2\sqrt{6}\ ;$$

$$S = \sqrt{6},\quad \left|\bar{b}\right| = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}\ \text{ и }\ h = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.$$

Пример 5.15.

Доказать, что векторы $\bar{a} = 7\bar{i} - 3\bar{j} + 2\underline{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} - 7\bar{j} + 8\bar{k}$ и $\bar{c} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ компланарны.

Решение:

Найдем смешанное произведение векторов:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Смешанное произведение векторов равно нулю, следовательно, векторы линейно зависимы и компланарны.

Пример 5.16.

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} + 3\bar{b};\quad 3\bar{a} + \bar{b}$, если $\left|\bar{a}\right| = \left|\bar{b}\right| = 1;\quad \bar{a}\wedge\bar{b} = 30^0.$

Решение:

$$(\bar{a}+3\bar{b})\times(3\bar{a}+3\bar{b}) = 3\bar{a}\times\bar{a} + \bar{a}\times\bar{b} + 9\bar{b}\times\bar{a} + 3\bar{b}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a} + 9\bar{b}\times\bar{a} = 8\bar{b}\times\bar{a}$$

$$S = 8\left|\bar{b}\right|\left|\bar{a}\right|\sin 30^0 = 4\,(\text{ед}^2).$$

Ответ: 4 кв. ед.

5.6. Смешанное произведение и его свойства

Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – три произвольных вектора.

Определение:

Три вектора называются ***компланарными***, если они параллельны одной плоскости, т.е., будучи приведены к одному началу, лежат в одной плоскости.

Определение:

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ называется скалярное произведение вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ на вектор $\bar{c}$, т.е.

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}.$$

Обозначение: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Геометрический смысл смешанного произведения определяется следующей теоремой.

Теорема 1.1. Смешанное произведение $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$ равно объему параллелепипеда V, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, взятому со знаком "+", если тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ правая, и со знаком "–", если тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ левая.

Если векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны, то смешанное произведение рано нулю, т.е.

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{cases} V, & \text{если } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ правая тройка векторов,} \\ -V, & \text{если } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ левая тройка векторов,} \\ 0, & \text{если } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ компланарны.} \end{cases} \qquad (5.18)$$

Доказательство.

Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – некомпланарные векторы, образующие правую тройку. Введем обозначения:

V– объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$,

S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}$,

h – высоту параллелепипеда, опущенную из конца вектора $\bar{c}$,

φ – угол между векторами, $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$,

ψ – угол между векторами $\bar{a} \times \bar{b}$ и $\bar{c}$ (рис. 5.21).

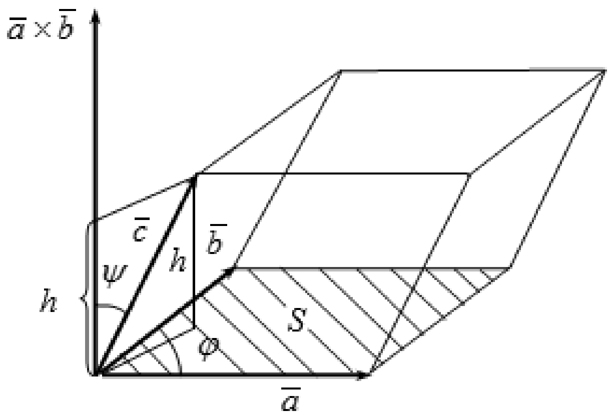


Рис. 5.21. Объем параллелепипеда V, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Тогда по определению скалярного и векторного произведений векторов находим:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = |\bar{a} \times \bar{b}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos\psi = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi \cdot |\bar{c}| \cdot \cos\psi,$$

но $\quad |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi \cdot = S, \quad |\bar{c}| \cdot \cos\psi = h, \quad S \cdot h = V,$ т.е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = V$.

Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – некомпланарные векторы, образующие левую тройку, тогда векторы $\bar{a} \times \bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют угол, равный $\pi - \psi$, при этом $\cos(\pi - \psi) = -\cos\psi$, следовательно:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = |\bar{a} \times \bar{b}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos(\pi - \psi) = -|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi \cdot |\bar{c}| \cdot \cos\psi = -V.$$

Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны.

Если $\bar{c} = \bar{0}$, то утверждение очевидно.

Пусть $\bar{c} \neq \bar{0}$, тогда либо $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ (если векторы $\bar{a}, \bar{b}$ коллинеарны) и $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{0}$, либо $\bar{a} \times \bar{b} \perp \bar{c}$ и тогда $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{0}$.

Верно и обратное последнему утверждение, т.е., если

$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{0}$, то векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны.

Действительно, если $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ некомпланарны, то по теореме 1.1 $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \pm V \neq 0$, что противоречит условию $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{0}$.

Свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т.е.

$$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) \cdot \bar{a} = \left(\bar{c} \times \bar{a}\right) \cdot \bar{b}.$$

2. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения, т.е.

$$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \left(\bar{b} \times \bar{c}\right).$$

3. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей, т.е.

$$\overline{abc} = -\overline{acb}, \ \overline{abc} = -\overline{bac}, \ \overline{abc} = -\overline{cba}.$$

4. Смешанное произведение ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны, т.е.

$\overline{abc} = 0$ <=> $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ – компланарны.

Смешанное произведение трех векторов равно нулю, если

– хотя бы один из векторов равен нулю;

– два данных вектора коллинеарны.

5. *Смешанное произведение через координаты:*

Пусть заданы вектора

$$\bar{a} = (x_1, y_1, z_1),\ \bar{b} = (x_2, y_2, z_2) \text{ и } \bar{c} = (x_3, y_3, z_3).$$

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

6. *Объем параллелепипеда*, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ вычисляется как

$$V_{пар-да} = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|,$$

объем треугольной пирамиды, построенной на этих векторах, равен

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right| \text{ (рис. 5.22).}$$

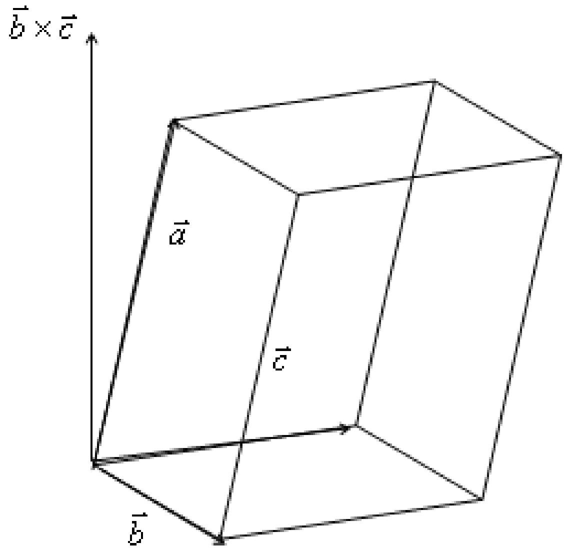


Рис. 5.22. Параллелепипед, построенный на векторах $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$.

Основные приложения смешанного произведения векторов

1) Вычисление объема тетраэдра (параллелепипеда), построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ (рис. 5.21).

Если векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ некомпланарны, то по теореме 1.1

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right| \quad \left(V_{\text{пар}} = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|\right). \tag{5.19}$$

2) Вычисление высоты тетраэдра (параллелепипеда). Вычислим объем тетраэдра двумя способами:

с одной стороны,

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right| \quad ,$$

с другой стороны,

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}Sh = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|h,$$

отсюда $h = \dfrac{\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|}{\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}$ (высота параллелепипеда такая же);

3) Условие компланарности векторов:

$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарны

Пример 5.17.

Докажите, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости.

Решение:

Найдем координаты векторов:

$\overrightarrow{AB} = (-2;-6;1)$

$\overrightarrow{AC} = (4;-3;-2)$

$\overrightarrow{AD} = (-4;-2;2)$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример 5.18.

Найдите объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Решение:

Найдем координаты векторов:

$\overrightarrow{BA} = (-2;-3;-4)$

$\overrightarrow{BD} = (1;4;-3)$

$\overrightarrow{BC} = (4;-1;-2)$

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{6} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-2(-8-3) + 3(-2+12) - 4(-1-16)) =$$

$$= \frac{1}{6}(22+30+68) = 20(ed^3)$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \bar{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8-3) - \vec{j}(-2+12) + \vec{k}(-1-16) = -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{11^2+10^2+17^2} = \sqrt{121+100+289} = \sqrt{510}.$$

$$S_{осн} = \frac{\sqrt{510}}{2} \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Т.к. $V = \frac{1}{3}S_{осн}h \Rightarrow h = \frac{3V}{S_{осн}} \Rightarrow h = \frac{120}{\sqrt{510}} = \frac{4\sqrt{510}}{17}$ (куб. ед).

5.7. Задачи на самостоятельную подготовку

№1. Пусть $O, l, \overline{n}$ сферическая система координат. Введем декартову прямоугольную систему координат $O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{n}$, где $\overline{e_1}$ направлен вдоль l, а угол $\frac{\pi}{2}$ от $\overline{e_1}$ к $\overline{e_2}$ отсчитывается в сторону возрастания полярного угла.

Напишите формулы, выражающие декартовы координаты через сферические.

№2. Дано: $\overline{a} = (4;-2;-4), \overline{b} = (6;-3;2)$.

Найдите $\overline{a}\cdot\overline{b}$; $(\overline{a}-\overline{b})\cdot\overline{b}$; $\left(\frac{1}{4}\overline{a}-\overline{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\overline{a}-\overline{b}\right)$.

Выясните, ортогональны ли векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

№3. Дано: $\overline{a} = m\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$; $\overline{b} = 4\overline{i} + m\overline{j} - 7\overline{k}$. Определите значение m, при котором векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны.

№4. Дано: $\overline{a} = (4;-12;z)$. Найдите z, если $|\overline{a}| = 13$.

№5. Дано: $\overline{AB} = (2;-3;-1), B(1;-1;2)$. Найдите координаты точки A.

№6. Даны точки $A(5;1)$ и $B(-4;14)$. Найдите:

а) координаты вектора $\overline{AB}$ и его длину;

б) направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$;

в) середину вектора $\overline{AB}$;

г) пусть т. B – середина $\overline{AC}$. Найти координаты точки C;

д) величину угла ABC.

№7. Может ли вектор составлять с координатными осями углы

а) $\alpha = 45°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 120°$?

б) $\alpha = 135°$; $\beta = 30°$; $\gamma = 210°$?

№8. На оси абсцисс найдите точку, которая находится на расстоянии 5 единиц от точки $M(1;3)$.

№9. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, $A(-1;-1)$; $B(0;1)$; $C(-4;0)$.

Найдите: а) т. D; б) угол A; в) $\overline{AB}\cdot\overline{BC}$; г) $-\frac{1}{2}\overline{AC}$; д) направляющие косинусы $\overline{AC}$; е) точку пересечения диагоналей.

№10. Даны вершины треугольника A(1; 2; −4), B(4; 2; 0), и C(−3; 2; −1). Определите его внутренний угол при вершине B.

№11. Вычислите внутренние углы треугольника A(−1; −2; −1), B(−3; 1; −7) иC(−7; −4; 2). Проверить, является ли данный треугольник равнобедренным.

№12. Определите, коллинеарны ли векторы $\overline{c_1}$ и $\overline{c_2}$, построенные по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, где

$\overline{a}=(1,-2,3), \overline{b}=(3,-1,0), \overline{c_1}=2\overline{a}+5\overline{b}, \overline{c_2}=-\overline{a}+3\overline{b}.$

№13. Найдите длину медианы AM треугольника с вершинами $A(2;-2;0)$; $B(7;-3;1)$; $C(1;-1;5)$.

№14. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ составляют угол $45°$. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах

$\overline{a}-3\overline{b}, 2\overline{a}+3\overline{b}$, если $|\overline{a}|=|\overline{b}|=5$.

№15. Вычислите синус угла, образованного векторами $\overline{a}=(2;-2;1)$ и $\overline{b}=(2;3;6)$.

№16. Вычислите площадь треугольника с вершинами

а) $A(1;1;1), B(2;3;4), C(4;3;2)$;

б) A(−1; −2; 0), B(−3; 0; 3), и C(−5; −2; −6).

№17. Даны вершины треугольника A(−1; 1; −2), B(−5; 6; −2), и C(−1; −3; 1).Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC .

№18. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, где

$\overline{a}=3\overline{p}+5\overline{q}, \overline{b}=2\overline{p}-5\overline{q},$

$|\overline{p}|=4, |\overline{q}|=2, \angle(\overline{p},\overline{q})=\frac{\pi}{6}.$

№19*. Найдите угол между единичными векторами $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ если известно, что векторы $\overline{a}=\overline{e_1}+2\overline{e_2}, \overline{b}=5\overline{e_1}-4\overline{e_2}$

взаимно перпендикулярны.

№20. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $30°$. Зная, что $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 3$, $|\bar{c}| = 3$, вычислите $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$.

№21. Найдите смешанное произведение векторов $\bar{a} = (1;-1;1), \bar{b} = (1;1;1)$ и $\bar{c} = (2;3;4)$.

№22. Найдите объем треугольной пирамиды с вершинами $A(2;2;2)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;4)$ и $D(5;5;6)$.

№23. Покажите, что векторы $\bar{a} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + 7\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ компланарны.

№24. Вычислите объем тетраэдра с вершинами в точках $A_1(2,-4,-3)$, $A_2(5,-6,0)$, $A_3(-1,3,-3)$, $A_4(-10,-8,7)$ и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

№25. Вычислите диагонали и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = \bar{k} - \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$.

№26. Определите, лежат ли точки $A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;0)$ и $D(5;0;-6)$ в одной плоскости.

№27. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\bar{b} = -3\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = 2\bar{j} + 5\bar{k}$. Определите, правой или левой будет тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Контрольные вопросы к Главе 5

1. Чем отличаются векторные величины от скалярных?
2. Ускорение – это векторная величина или скалярная?
3. Как определить вектор?
4. Как найти модуль вектора?
5. Может ли модуль вектора быть меньше нуля?
6. Что такое коллинеарные векторы?
7. Что такое компланарные векторы?
8. Может ли начало радиус-вектора лежать в точке A(1,0) ?
9. Какие векторы называются свободными?
10. Как находятся координаты вектора?
11. Определения суммы и разности двух векторов.
12. Можно ли вычитать векторы разных размерностей?
13. Сформулируйте правило параллелограмма.
14. Как расположены и как направлены векторы a ρ и a ρ λ , если 0< λ ?
15. Понятие базиса системы векторов.
16. Является ли базисом система двух коллинеарных векторов на плоскости?
17. Является ли система трех компланарных векторов в пространстве базисом?
18. Каковы три формы записи вектора в пространстве?
19. Введите определение скалярного произведения векторов.
20. Скалярное произведение векторов является числом или вектором?
21. Введите определение векторного произведения векторов.
22. Векторное произведения векторов является числом или вектором?
23. Введите определение смешанного произведения векторов. Это число или вектор?
24. В каких случаях скалярное произведение равно нулю? Меньше нуля?

25. В каких случаях векторное произведение равно нулю?
26. Основное свойство векторного произведения.
27. Каким условием определяется коллинеарность двух векторов в координатах.
28. Каким условием определяется ортогональность двух векторов в координатах.
29. Каким условием определяется компланарность трех векторов

ГЛАВА 6.АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6.1. Прямая на плоскости

Пусть дана система координат Oxy и прямая L, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0)$ с лежащим на ней *ненулевым* вектором $\overline{S}$.

Теорема 2.1. Множество радиусов − векторов точек прямой L представимо в виде

$\overline{r} = \overline{r}_0 + \tau \overline{S}$,

где

τ – произвольный вещественный параметр,

$\overline{S}$ – вектор, параллельный прямой L.

Доказательство:

Пусть M – некоторая точка с текущими координатами $(x; y) \in R$

лежитна прямой,

тогда вектор $\overline{S}$ должен быть коллинеарен вектору $\overline{M_0M}$ (рис. 6.1).

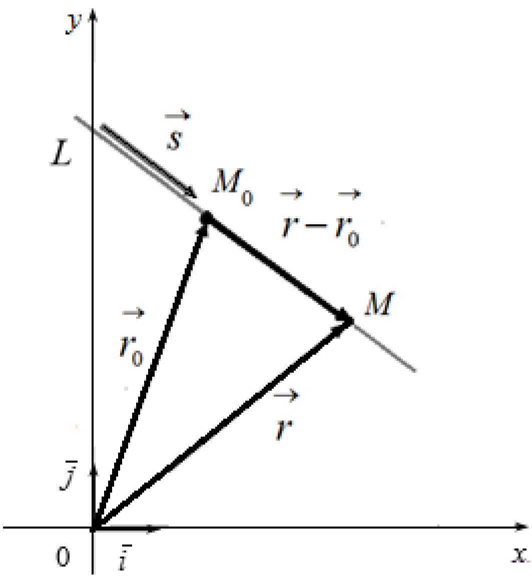


Рис. 6.1. Прямая на плоскости.

$$\overline{M_0M} \parallel \overline{S} \Rightarrow \overline{M_0M} = \tau \overline{S} \Rightarrow$$
$$\bar{r} - \bar{r}_0 = \tau \overline{S}.$$

Откуда получаем параметрическое представление прямой:
$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \tau \overline{S} \quad \forall \tau \in (-\infty, +\infty).$$

Теорема доказана.

Определение:

Любой вектор $\vec{S}$, параллельный прямой, называется ее ***направляющим вектором***.

Определение:

Вектор $\overline{n}$, перпендикулярный прямой, называется ее *нормальным вектором* (или нормалью) (рис. 6.2).

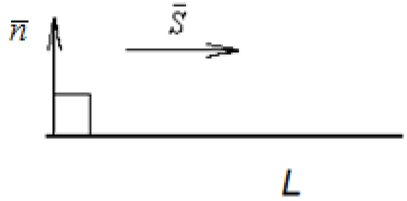


Рис. 6.2. Прямая *L*, ее направляющий вектор $\vec{S}$ и нормальный вектор $\overline{n}$.

Теорема 2.2. Всякая прямая в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида $Ax + By + C = 0, |A| + |B| > 0$. (Рис.6.3)

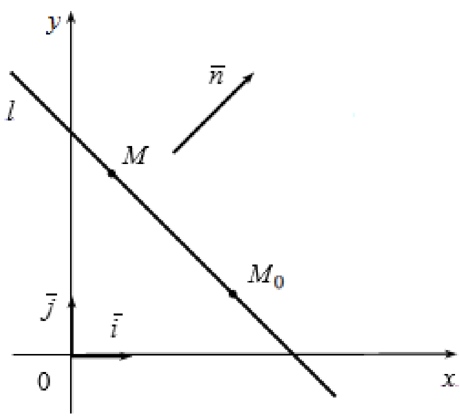


Рис. 6.3. Прямая *L* с лежащей на ней точкой $M_0(x_0; y_0)$

и нормальным вектором $\overline{n} = (A; B)$.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (6.1)$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\overline{n} = (A; B)$.

Общее уравнение прямой на плоскости.

$$Ax + By + C = 0 \qquad (6.2)$$

Итак, уравнение прямой (6.2) является уравнением первой степени относительно переменных *x*, *y* (координат произвольной точки *M*, которые называются текущими координатами).

Его коэффициенты *A*, *B* являются координатами нормального вектора.

Рассмотрим частные случаи уравнения (6.2), в которых коэффициенты *A*, *B* или *C* равны нулю.

1)Если в уравнении (6.2) *C* = 0, то прямая *L* проходит через начало координат.

2) Если *A* = 0 ($B \neq 0$, $C \neq 0$), т.е. уравнение имеет вид

$y = y_0,\ y_0 = -\dfrac{C}{B}$.

Прямая *L* параллельна оси 0*x*.

3)Если В = 0 ($A \neq 0$, $C \neq 0$), т.е. уравнение имеет вид

$x = x_0,\ x_0 = -\dfrac{C}{A}$.

Прямая *L* параллельна оси 0*y*.

4)Если А = 0, *C* = 0 получаем уравнение *y* = 0, т.е. уравнение оси абсцисс 0*x*.

5) Если *B*= 0, *C* = 0 получаем уравнение *x* = 0 – уравнением оси 0*y*.

Теорема 2.3.

Всякое уравнение вида $Ax + By + C = 0,$ где $|A| + |B| > 0$, в любой декартовой системе координат есть уравнение некоторой прямой.

Для прямой, заданной уравнением (6.2), вектор $\overline{N}$ имеет координаты $(A; B)$, т.е. $\overline{N} = (A; B)$.

Пример 6.1. Составим уравнение прямой *L*, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ и имеющей направляющий вектор $\overline{S} = (s_x; s_y)$.

Дано:

L – прямая;

$M_0(x_0; y_0) \in L$;

$\overline{S} \| L, \overline{S} = (s_x; s_y)$.

Найти: уравнение прямой *L*.

Решение:

Прямая *L* (рис. 6.4) задана своей точкой $M_0(x_0; y_0)$ и направляющим вектором

$\overline{S} = (s_x; s_y)$, т.е. $\overline{S} \parallel L$.

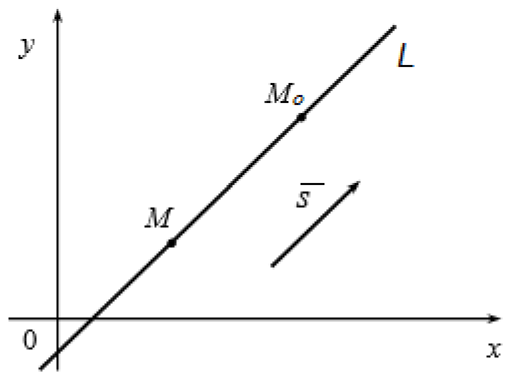


Рис. 6.4. Прямая *L* с лежащей на ней точкой $M_0(x_0; y_0)$

и направляющим вектором $\overline{S} = (s_x;\, s_y)$.

Тогда векторы $\overline{S}$ и $\overline{M_0M}$ коллинеарны, следовательно, их соответствующие координаты пропорциональны.

$\overline{M_0M} = (x - x_0;\, y - y_0)$

Условие коллинеарности ненулевых векторов $\overline{S}$ и $\overline{M_0M}$ в координатной форме имеет вид

$$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y}. \tag{6.3}$$

Полученное уравнение является уравнением искомой прямой L и называется ***каноническим.***

Возможны случаи, когда вектор $\overline{S}$ перпендикулярен одной из осей координат.

1) $\overline{S} \perp 0x \Rightarrow s_x = 0$.

2) $\overline{S} \perp 0y \Rightarrow s_y = 0$.

В этих случаях каноническое уравнение прямой записывается, соответственно, в виде:

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{s_y}, \quad \text{либо}$$

$$\frac{x - x_0}{s_y} = \frac{y - y_0}{0}.$$

Пример 6.2. Составим уравнение прямой L, проходящей через две заданных точки $M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2)$.

Дано:

L – прямая;

$M_1(x_1;\, y_1) \in L,\ M_2(x_2;\, y_2) \in L$.

Найти: уравнение прямой L.

Решение:

Прямая *L* проходит через две заданных точки $M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2)$ (рис. 6.5).

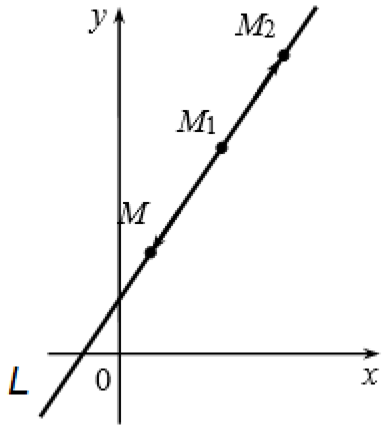


Рис. 6.5. Прямая *L* с двумя лежащими на ней точками $M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2)$.

Тогда векторы

$\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$ и $\overline{M_1M}_2 = (x_2 - x_1;\, y_2 - y_1)$

коллинеарны, поэтому уравнение

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{6.4}$$

является уравнением прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2)$.

Пример 6.3. Составим уравнение прямой, отсекающей на осях координат *Ox* и *Oy*, соответственно, отрезки длиной a и b.

Дано:

L – прямая;

$M_1(0;\, b) \in L,\; M_2(a;\, 0) \in L$.

Найти: уравнение прямой *L*.

Решение:

Пусть прямая *L* пересекает оси координат в точках $M_1(0;\, b)$, $M_2(a;\, 0)$ (рис. 6.6).

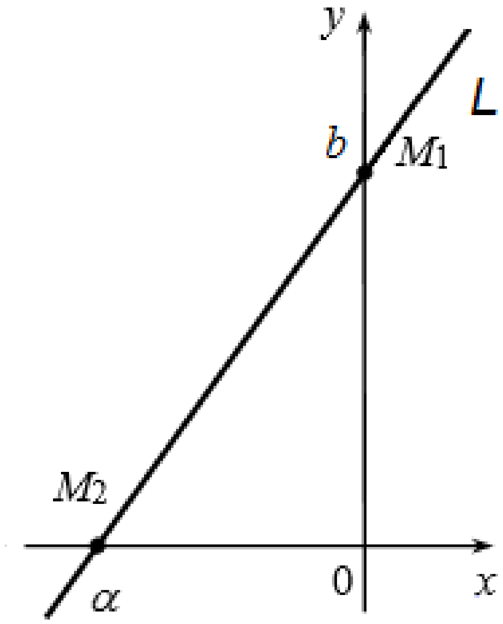


Рис. 6.6. Прямая L с двумя лежащими на ней точками $M_1(0;\, b)$ и $M_2(a;\, 0)$.

Запишем уравнение прямой L в виде (6.4):

$\frac{x-0}{a-0}=\frac{y-b}{0-b}$, отсюда получаем:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{6.5}$$

Уравнение (6.5) называется *уравнением прямой в отрезках* (a и b – отрезки, отсекаемые прямой L на осях координат).

Пусть прямая L образует с осью $0x$ угол α (рис. 6.7) и проходит через точку

$$M_0(x_0;\, y_0).$$

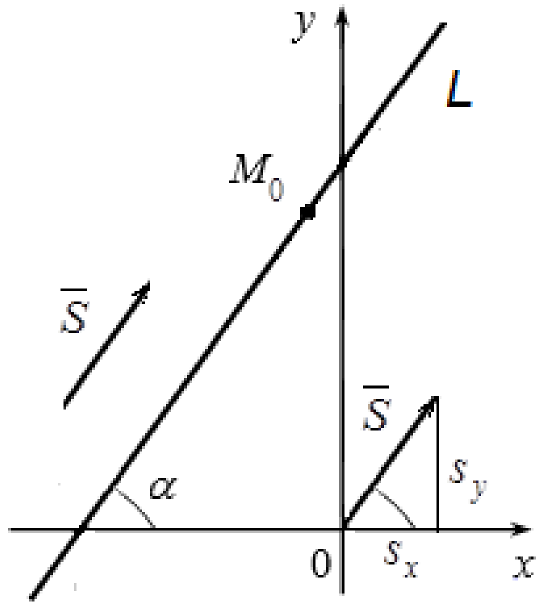


Рис. 6.7. Прямая *L* с лежащей на ней точкой $M_0(x_0; y_0)$ и углом наклона α к оси *Ox*.

Пример 6.4.

Дано:

L – прямая;

$M_0(x_0; y_0) \in L;\ \angle(L, Ox) = \alpha$.

Найти: уравнение прямой *L*.

Решение:

Запишем каноническое уравнение прямой *L*, взяв в качестве направляющего вектора вектор $\overline{S} = (s_x; s_y)$ единичной длины, который составляет с осью 0*x* угол α.

Очевидно, что

$s_x = \cos\alpha;\ s_y = \sin\alpha$.

Уравнение прямой *L* принимает вид:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha}.$$

Если $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, т.е. L не перпендикулярна оси 0x, то из последнего уравнения получаем:

$y - y_0 = tg\alpha \cdot (x - x_0)$.

Обозначим k = tgα (это число называется ***угловым коэффициентом*** прямой),тогда можно записать

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0) \tag{6.6}$$

уравнение прямой *с угловым коэффициентом k, проходящей через данную точку* $M_0(x_0; y_0)$.

Если в качестве точки $M_0(x_0; y_0)$ взять точку $M_0(0,\ b)$ пересечение прямой Lс осью 0y (рис. 6.8), то уравнение (6.6) примет вид:

$$y = kx + b\,. \tag{6.7}$$

Полученное уравнение называется уравнением прямой ***с угловым коэффициентом k и начальной ординатой b***.

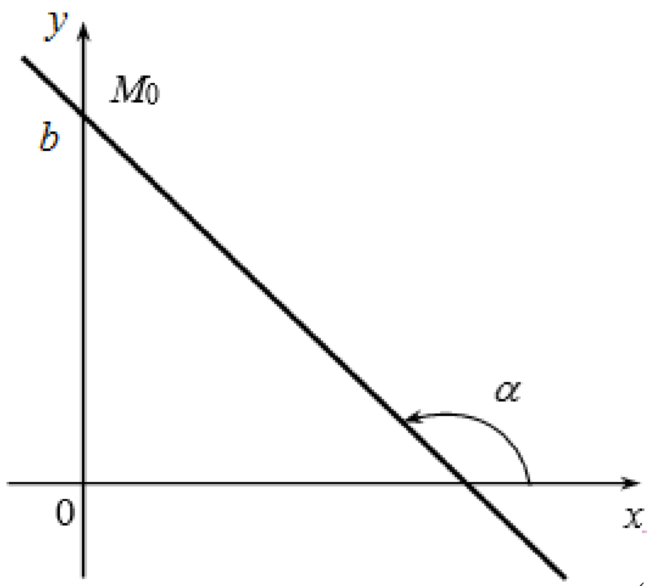


Рис. 6.8. Прямая L с лежащей на ней точкой $M_0(0; b)$и углом наклона α к оси Ox.

6.2. Способы задания прямой на плоскости

В произвольной декартовой системе координат существуют различные формы задания прямой на плоскости. Рассмотрим основные из них.

1. Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0, \tag{6.8}$$

где $A^2 + B^2 \neq 0$.

Замечание 2.1.

Линейное уравнение (6.8) задает на плоскости прямую.

Линейное неравенство

$Ax + By + C > 0$, $|A| + |B| > 0$

определяет часть плоскости (множество точек, координаты которых x и y удовлетворяют данному неравенству), ограниченную прямой $Ax + By + C = 0,\ |A| + |B| > 0$.

2. Уравнение прямой L с направляющим вектором $\overline{S} = (m, n)$ и точкой $M_0(x_0; y_0) \in L$ (каноническое)

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{6.9}$$

3. *Параметрическое уравнение прямой L с направляющим вектором $\overline{S} = (m, n)$ и точкой $M_0(x_0; y_0) \in L$*

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \tag{6.10}$$

где $t \in R$.

4. *Уравнение прямой, проходящей через две данные точки* $M_1(x_1;y_1),\ M_2(x_2;y_2)$

$$1)\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1};\text{где } (x_2-x_1)(y_2-y_1)\neq 0. \qquad (6.11)$$

$$2)\ y=y_1\ \forall x, \text{ если } y_2=y_1;$$

$$3)\ x=x_1\ \forall y, \text{ если } x_2=x_1.$$

Заметим, что эти три случая могут быть описаны уравнением вида

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad (6.11.1)$$

Замечание 2.2.

Для того чтобы три точки $M_1(x_1;y_1),\ M_2(x_2;y_2),\ M_3(x_3;y_3)$ лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы их координаты удовлетворяли уравнению (6.5)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (6.12)$$

5. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку* $M_0(x_0,y_0)$, *с нормальным вектором* $\bar{n}=(A;B)$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (6.13)$$

Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox и обозначается $k=tg\,\alpha$.

6. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через*

точку $M_0(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{6.14}$$

7. *Уравнение прямой «в отрезках»*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{6.15}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициентa является координатой точки пересечения прямой с осью Ox, а b – координатой точки пересечения прямой с осью Oy**.**

8. *Уравнение прямой в «нормальной форме»*

Рассмотрим общее уравнение прямой

$Ax + Bx + C = 0$,

где $A^2 + B^2 \neq 0$.

Преобразуем уравнение, разделив обе части на $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Получаем

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Введем обозначения

$$\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}};\ \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}};\ \rho = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Получаем так называемую *нормальную* форму записи уравнения

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi + \rho = 0. \tag{6.16}$$

Геометрический смысл параметров ρ иφ ясен из следующего рисунка 6.9.

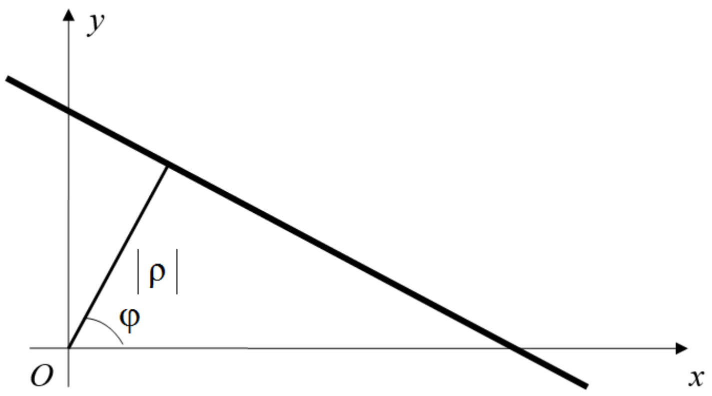


Рис.6.9. Геометрический смысл параметров ρ и φ уравнения прямой в нормальной форме.

6.3. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой

Пусть даны две прямые L_1 и L_2 на плоскости:

$$L_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0,\quad L_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Чтобы определить их взаимное расположение, достаточно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \tag{6.17}$$

Если эта система имеет единственное решение (x_0, y_0), то прямые L_1 и L_2, пересекается в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Если система (6.17) не имеет решений, то прямые L_1 и L_2 не пересекаются, следовательно, $L_1 \parallel L_2$.

Если система (6.17) имеет бесконечное множество решений, то L_1 и L_2 совпадают.

Взаимное расположение прямых L_1 и L_2 можно определить, не решая системы (6.17).

Действительно, из общего уравнения прямой L_1, находим, что ее нормальный вектор $\overline{n}_1$ имеет координаты A_1 и B_1 , т.е. $\overline{n}_1 = (A_1, B_1)$, а прямая L_2 имеет нормальный вектор $\overline{n}_2 = (A_2, B_2)$.

Если векторы $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$ коллинеарны, то прямые L_1 и L_2 либо параллельны, либо совпадают. Если $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$ неколлинеарны, то прямые пересекаются. Зная, что коллинеарные векторы (и только они) имеют пропорциональные координаты, получаем:

если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, то прямые L_1 и L_2 пересекаются;

если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые L_1 и L_2 параллельны;

если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые L_1 и L_2 совпадают.

Используя нормальные векторы $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$ можно также найти угол между прямыми, так как угол между нормальными векторами равен одному из углов α между прямыми L_1 и L_2 (рис. 6.10).

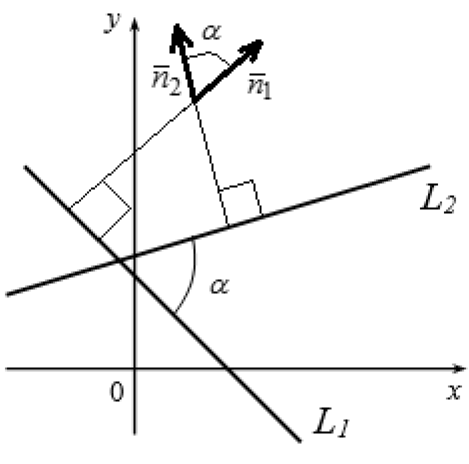


Рис.6.10. Взаимное расположение двух прямых L_1и L_2.

Из определения скалярного произведения векторов получаем: $\cos\alpha = \dfrac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|}$, поэтому

$$\alpha = \arccos = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|}.$$

Пусть заданы две прямые:

$$y = k_1 x + b_1;\ y = k_2 x + b_2 .$$

Острый угол между этими прямыми можно определить по формуле:

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если
$k_1 = k_2$.
Две прямые перпендикулярны, если
$k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Пучком прямых на плоскости называется совокупность всех прямых, проходящих через некоторую заданную точку, именуемую вершиной пучка.

Утверждение 2.1. Пусть точка, общая для всех прямых пучка, является точкой пересечения непараллельных прямых $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$.

Тогда справедливы утверждения

1) для любой прямой пучка найдется пара не равных нулю одновременно чисел α и β, таких, что

$$\alpha(A_1 x + B_1 y + C_1) + \beta(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$$

есть уравнение данной прямой,

2) при любых, не равных нулю одновременно α и β, уравнение

$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$ есть уравнение некоторой прямой данного пучка.

Уравнение

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

с неравными одновременно нулю параметрами α и β называется уравнением *пучка прямых* на плоскости.

Расстояние от точки до прямой

Утверждение 2.2.

Если задана точка $M_0(x_0,y_0)$, то расстояние до прямой $Ax+By+C=0$ определяется по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (6.18)$$

Докажем это утверждение.

Пусть на плоскости заданы прямая $L:\ Ax+By+C=0$ и точка $M_0(x_0,\ y_0)$. Найдем расстояние d от точки $M_0(x_0,\ y_0)$до прямой L (рис. 6.11).

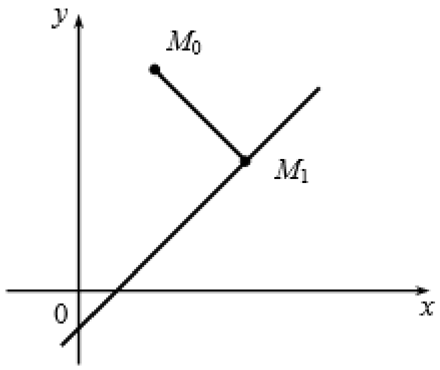


Рис.6.11. Расстояние от точки $M_0(x_0,\ y_0)$до прямой L.

Пусть $M_1(x_1,\ y_1)$ – точка пересечения прямой L и прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0)$перпендикулярно L. Так как M_1 лежит на L, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, таким образом, имеем тождество:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0. \tag{6.19}$$

Рассмотрим вектор $\overline{M_1M_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$.

Этот вектор коллинеарен нормальному вектору $\bar{n} = (A_1; B_1)$ прямойL и $\left|\overline{M_1M_0}\right| = d$, поэтому косинус угла между векторами $\bar{n}$ и $\overline{M_1M_0}$ равен либо 1, либо -1.

Следовательно, $\bar{n} \cdot \overline{M_1M_0} = \pm d \cdot |\bar{n}|$, откуда

$$d = \pm \frac{\bar{n} \cdot \overline{M_1M_0}}{|\bar{n}|},$$

$$d = \pm \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C - (Ax_1 + By_1 + C)}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Учитывая тождество (6.18) получаем:

$$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{или} \quad d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{6.20}$$

Пример 6.5. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон: $2x - y + 4 = 0$ и $2x - y + 10 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей: $x + y + 2 = 0$.

Дано:

Ромб; уравнения сторон ромба:

$2 \cdot x - y + 4 = 0;$

$2 \cdot x - y + 10 = 0.$

Уравнение одной из его диагоналей: $x + y + 2 = 0$.

Решение:

Выясним взаимное расположение известных сторон ромба.

Рассмотрим две прямые L_1 и L_2 на плоскости:

$L_1: \ 2 \cdot x - y + 4 = 0; \quad L_2: \ 2 \cdot x - y + 10 = 0.$

(уравнения прямых в общем виде

$$L_1: \ A_1x+B_1y+C_1=0, \ \ L_2: \ A_2x+B_2y+C_2=0).$$

Заметим, что, если выполнены условия: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые L_1 и L_2 параллельны.

В данном случае,

$$\frac{2}{2}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{4}{10}.$$

Итак, прямые L_1 и L_2 параллельны.

Для построения рисунка (рис. 6.11) запишем уравнения в отрезках для данных прямых:

$$L_1=RP: \ 2\cdot x-y+4=0, \quad \frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1;$$

$$L_2=QS: \ 2\cdot x-y+10=0, \quad \frac{x}{-5}+\frac{y}{10}=1;$$

$$D_1=RS: x+y+2=0, \qquad \frac{x}{-2}+\frac{y}{-2}=1.$$

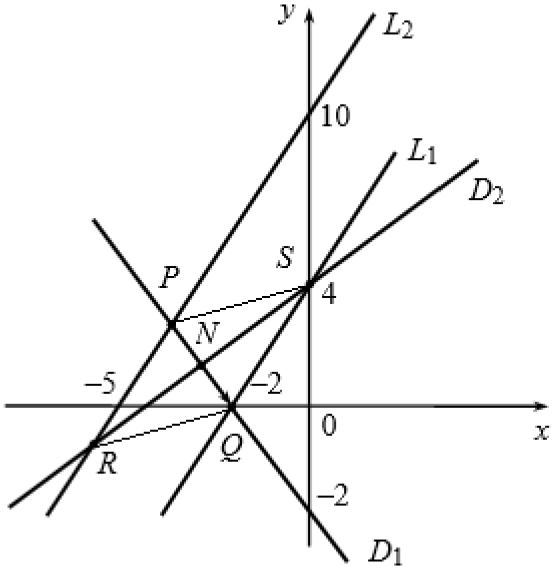


Рис. 6.12. Ромб PSQR.

Наметим план решения:

1) находим вершины ромба P и Q;

2) находим точку пересечения диагоналей ромба N;

3) через точку N проводим диагональ D_2;

4) находим оставшиеся вершины ромба R и S.

1) Так как точка P является точкой пересечения прямых L_2 и D_1, то ее координаты находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y + 10 = 0; \\ x + y + 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad 3x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4,\ y = 2.$$

Найдем координаты точки Q, как точку пересечения прямой L_1 с осью Ox:

$$\begin{cases} y = 0, \\ 2 \cdot x - y + 4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0, \\ 2 \cdot x = -4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = -2. \end{cases}$$

$Q(–2, 0)$.

2) Так как диагонали ромба в точке пересечения делятся пополам, то точка $N(x_N, y_N)$ является серединой отрезка PQ, поэтому ее координаты – полусумма соответствующих координат точек P и Q:

$$x_N = \frac{1}{2}(-4-2) = -3,\ \ y_N = \frac{1}{2}(2+0) = 1,\ \ N(-3, 1)\ .$$

3) Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то прямая D_2 перпендикулярна вектору $\overline{PQ}$.

Найдем его координаты:

$\overline{PQ}$ = (–2 – (–4); 0 – 2) = (2; –2).

Находим уравнение диагонали D_2 как уравнение прямой, проходящей через точку $N(–3, 1)$ перпендикулярно вектору

$\overline{PQ}$ = (2; –2):

$2\cdot(x – (–3)) + (–2)(y – 1) = 0, \quad x – y + 4 = 0.$

4) Вершины ромба R и S – точки пересечения прямых L_2 и D_2, L_1 и D_2, соответственно, находим из уравнений:

$$R: \begin{cases} 2x - y + 10 = 0 \\ \ \ x - y + \ 4 = 0 \end{cases}, \ \Rightarrow \ \begin{matrix} x = -6 \\ y = -2 \end{matrix},$$

$$S: \begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ \ \ x - y + 4 = 0 \end{cases}, \ \Rightarrow \ \begin{matrix} x = 0 \\ y = 4 \end{matrix}.$$

Ответ: $P(-4, 2)$ $R(-6, -2)$, $Q(-2, 0)$, $S(0, 4)$.

Пример 6.6. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $P(2, -7)$, уравнения высоты $3x + y + 11 = 0$ и медианы $x + 2y + 7 = 0$, проведенных из разных вершин.

Решение. Для построения рисунка (рис. 6.13) приведем уравнения данных прямых к уравнениям в отрезках:

h: $3x + y + 11 = 0$, $\dfrac{x}{-11/3} + \dfrac{y}{-11} = 1$;

m: $x + 2y + 7 = 0$, $\dfrac{x}{-7} + \dfrac{y}{-7/2} = 1$.

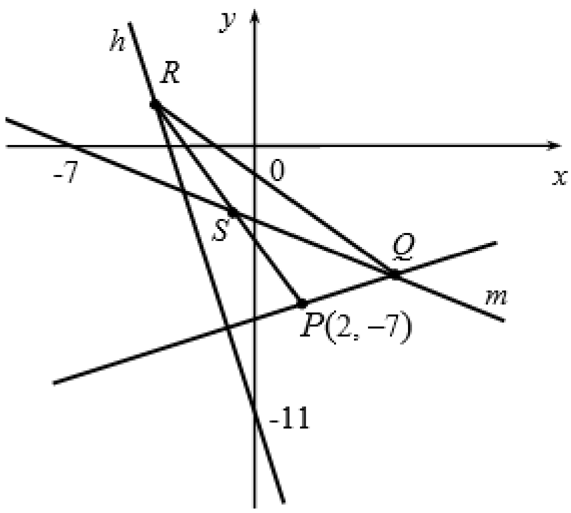


Рис. 6.13. Пересечение заданных прямых

План решения:

1) находим уравнение прямой PQ;

2) находим координаты точки *R*;

3) находим уравнения прямых *RP* и *RQ*.

1) Находим нормальный вектор прямой *h*: $\bar{n} = (3, 1)$.

Уравнение стороны *PQ*, проходящей через точку *P*(2, –7) параллельно вектору $\bar{n} = (3, 1)$, запишем в виде:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-(-7)}{1}, \qquad x - 3y - 23 = 0.$$

Находим координаты точки *Q* – точки пересечения прямых *PQ* и *m*:

$$\begin{cases} x - 3y - 23 = 0; \\ x + 2y + 7 = 0, \end{cases} \qquad x = 5, \qquad y = -6.$$

2) По свойству медианы треугольника *PQR* точка $S(x_S,\ y_S)$ является серединой отрезка *RP*. Следовательно:

$$x_S = \frac{x_R + 2}{2}, \quad y_S = \frac{y_R - 7}{2}.$$

Точка *S* лежит на медиане *m*, значит,

$$x_S + 2y_S + 7 = 0, \quad \frac{x_R + 2}{2} + 2 \cdot \frac{y_R - 7}{2} + 7 = 0, \quad x_R + 2y_R + 2 = 0.$$

Точка *R* лежит на высоте *h*, значит,

$$3x_R + y_R + 11 = 0.$$

Из последних двух уравнений определяем координаты точки *R*, решая систему:

$$\begin{cases} x_R - 2y_R + 2 = 0; \\ 3x_R + y_R + 11 = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad x_R = -4,\ y_R = 1.$$

3) Составим уравнение прямой *RP*, проходящей через две заданные точки *R* и *P*:

$$\frac{x-(-4)}{2-(-4)} = \frac{y-1}{-7-1}, \qquad 4x + 3y + 13 = 0.$$

Аналогично, составим уравнение прямой *RQ*:

$$\frac{x-(-4)}{5-(-4)}=\frac{y-1}{6-1}, \qquad 7x+9y+19=0.$$

Ответ: $x-3y-23=0$, $4x+3y+13=0$, $7x+9y+19=0$.

6.4. Задачи на самостоятельную подготовку

№1.Дана точка $M(-1;-\sqrt{3})$. Найдите ее полярные координаты.

№2.Принадлежат ли линии $x^2-4x-y=0$ точки $A(1;-3)$ и $B(2;3)$?

№3.Найдите уравнение прямой, проходящей через точки:

а) A(4; 2), B(1; 3);

б)A(−3; 1),B(3;−2);

в)A(−1; 1),B(−3; 1).

№4.Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x+11y-27=0$ и $6x-7y-16=0$

а) параллельно вектору $\bar{b}=(-3;\ 6)$;

б) перпендикулярно вектору $\bar{c}=(-4;-5)$;

в) под углом $135°$ к положительному направлению оси Ox.

№5.Дан треугольник с вершинами $A(-2;\ 3)$, $B(4;-5)$ и $C(-6;1)$. Составьте уравнение медианы AD и высоты BE и найдите их длину.

№6.Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 3)$, параллельно прямой:

а) $3x-5y+6=0$; б) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}$.

№7.Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 3)$, перпендикулярно прямой:

а) $2x+7=0$; б) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{-1}$.

№8.Найдите площадь треугольника, ограниченного прямой $2x-5y-10=0$ и осями координат.

№9.Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 3)$, параллельно прямой $y=2x+5$.

№10.Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 3)$, перпендикулярно прямой $y=1-2x$.

№11.Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;\ 3)$,под углом 45°к прямой $x+7y-20=0$.

№12.Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;\ 8)$,под углом 45°к прямой $3x-y-4=0$.

№13.Даны две точки: $A(-1;\ 2)$, $B(1;-1)$. Составьте прямой, проходящей через точку *B* перпендикулярно отрезку *AB.*

№14.Найдите проекцию точки P(5; 5) на прямую, проходящую через точкиA(3; −1) и B(2; 2).

№15.Даны уравнения двух сторон прямоугольника: $3x+5y-2=0$ и $5x-3y+1=0$.Одна из его вершин находится в точке A(2; 2). Найти уравнения двух других сторон.

№16. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $4x+5y-1=0$ и $5x-y+3=0$. Одна из его вершин находится в точке А(4; 3). Найти уравнения двух других сторон.

№17. Точка А(1; 1) является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x+7y+2=0$. Найти площадь этого квадрата.

№18. Вычислите острый угол между прямыми

а) $y=2x-3$ и $x-2y+8=0$;

б) $x-3y+5=0$ и $2x-y-3=0$;

в) $5x-y+4=0$ и $2x+y-1=0$.

№19. Будут ли прямые $20x+4y-3=0$ и $5x+y-3=0$ параллельны?

№20. При каком *a* прямые $3x+y-4=0$ и $5x+ay-2=0$ перпендикулярны?

№21. Найдите расстояние от точки $A(-2;\ -3)$ до прямой $x-2y+3=0$.

№22. Показать, что прямые $2x-3y-6=0$ и $4x-6y-25=0$ параллельны, и найти расстояние между ними.

№23. Даны стороны треугольника: $x+3y-7=0$ (*AB*), $4x-y-2=0$ (*BC*), $6x+8y-35=0$ (*AC*). Найти длину высоты, проведенной из вершины *B*.

№24. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $3x-2y+12=0$ и $x-3y+11=0$ и точка пересечения его диагоналей $M(2;\ 2)$. Составьте уравнения двух других сторон параллелограмма.

№25. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $B(2;-3)$ и а) параллельно прямой $3x-2y+2=0$;

б) перпендикулярно прямой $3x+4y-2=0$.

№26. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $M(5;\ 1)$ и образующих с прямой $2x+y-4=0$ угол $\frac{\pi}{4}$.

№27. Показать, что прямые $4x-6y+7=0$ и $20x-30y-11=0$ параллельны.

№28. Даны прямая $3x-4y+10=0$ и точка $M(4;\ 3)$. Найти расстояние от точки *M* до данной прямой.

Контрольные вопросы к Главе 6

1. Найти середину отрезка с концами в точках А(1; -2) и В(4;-5).
2. Что означает, если при делении отрезка в заданном отношении λ=0; λ =1; λ=2; λ=3?
3. Найти полярные координаты точки А(-2; 1)
4. Каков геометрический смысл параметра *b* в уравнении с угловым коэффициентом $y=ax+b$?
5. Преобразуйте общее уравнение прямой на плоскости $ax+by=c$ в уравнение с угловым коэффициентом. Чему равен в этом случае угловой коэффициент?
6. Запишите угловой коэффициент прямой, проходящей через две заданные точки А(1; -2) и В(4;-5).
7. Какая из прямых, заданных уравнениями $y=3x+2$; $y=-3x+2$; $y=3x$, проходит через начало координат?
8. В общем уравнении прямой $ax+by=c$ объясните смысл коэффициентов *a* и *b*.

9. Запишите уравнение прямой в отрезках и объясните смысл входящих в него параметров.

10. Приведите уравнение прямой в отрезках к общему уравнению; к уравнению с угловым коэффициентом/

11. Угол между прямыми равен 45 градусам. Чему равен угол между нормалями к прямым?

12. Каково условие параллельности и перпендикулярности прямых, заданных общими уравнениями?

13. Каково условие параллельности и перпендикулярности прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами?

14. Что называется расстоянием от точки до прямой?

15. Если расстояние от точки до прямой равно 0, то что это значит геометрически?

16. По какой линии пересекаются две плоскости в пространстве?

17. Какие прямые в пространстве называются скрещивающимися?

18. Как расположен направляющий вектор относительно прямой, которую он определяет?

19. Могут ли равняться нулю знаменатели дробей в канонических уравнениях прямой и почему?

20. Запишите направляющий вектор прямой, проходящей через две данные точки.

21. Чему равны множители при параметре t в параметрических уравнениях прямой?

22. Запишите условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.

23. Расскажите, как находится расстояние от точки до прямой.

24. Как найти расстояние между двумя параллельными прямыми в пространстве?

25. Условие параллельности прямой и плоскости.

26. Условие перпендикулярности прямой и плоскости.

27. Равен ли угол между прямой и плоскостью углу между векторами их определяющими и почему

ГЛАВА 7. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

7.1. Нахождение расстояния от средств пожаротушения до очага пожара

На железной дороге KL произошла авария. Единственный доступный путь подъезда к очагу возгорания – дорога, не примыкающая к железнодорожному пути. Ближайшая точка возможного размещения пожарного автомобиля – точка M. Необходимо рассчитать длину рукава KM, достаточную для того, чтобы начать тушить пламя.

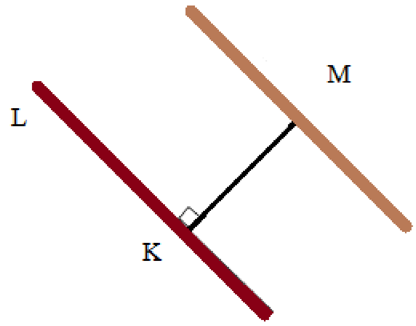


Рис. 7.1. Схема аварии

Данная задача сводится к нахождению расстояния от точки M (x_0; y_0) до прямой KL (рис. 7.1), заданной в общем виде уравнением:

$Ax + By + C = 0$.

Для этого нужно воспользоваться формулой, определяющей расстояние от точки до прямой:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (7.1)$$

Пример 7.1.

Пусть в условиях данной задачи прямая KL задана уравнением:

$20x - 21y - 15 = 0$, точка M(1; 3). Найти длину рукава KM.

Решение:

Здесь A=20; B= -21; C= -15; x_0=1; y_0=3.

$$KM = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$KM = \frac{|20 \cdot 1 - 21 \cdot 3 - 15|}{\sqrt{20^2 + 21^2}} = \frac{58}{29} = 2.$$

Ответ: 2

Задачи на самостоятельную подготовку

Вариант №	Прямая KL	Точка M
1	*4x-3y+1=0*	(6;-1)
2	*20x+15y-5=0*	(6;3)
3	*4x+3y-4=0*	(8;2)
4	*20x-45y+45=0*	(6;0)
5	*-4x+3y+3=0*	(3;8)
6	*-20x+15y-15=0*	(3;-1)
7	*-4x-3y-3=0*	(5;4)
8	*-20x-15y+30=0*	(4;6)
9	*8x+6y-1=0*	(5;4)
10	*-8x+6y-12=0*	(3;1)
11	*8x-6y+18=0*	(3;-1)
12	*-8x-6y+24=0*	(-3;0)
13	*2x-3y+36=0*	(4;6)

14	$7x+y-1=0$	(7;1)
15	$8x+3y-6=0$	(-5;1)
16	$5x-3y+9=0$	(4;-1)
17	$11x+7y-14=0$	(-2;-2)
18	$12x-3y+4=0$	(0;10)
19	$-2x+3y+8=0$	(3;-5)
20	$2x+3y-7=0$	(-1;-2)
21	$x+8y-4=0$	(4;4)
22	$9x+y-13=0$	(-1;-1)
23	$5x-3y+4=0$	(6;1)
24	$-5x-3y+1=0$	(5;2)
25	$-6x-5y+4=0$	(5;-2)
26	$6x+5y+4=0$	(-5;0)
27	$x+9y-1=0$	(0;7)
28	$7x+2y-4=0$	(6;-1)
29	$7x-2y+1=0$	(8;-2)
30	$9x+y-5=0$	(6;1)

7.2. Нахождение ширины провала после землетрясения

После сильного землетрясения образовался провал. Найти его ширину, если известно, что его края параллельны друг другу и заданы уравнениями прямых l и n.

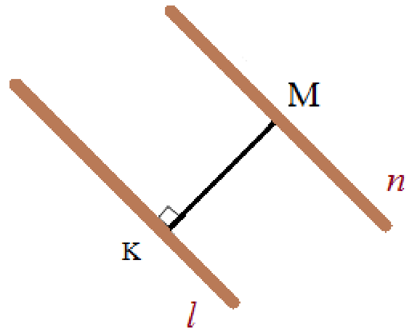


Рис. 7.2. Схема аварии

Задача сводится к определению расстояния от произвольной точки одной прямой до другой прямой. Полагая, например, что точка М находится на n и найдя её координаты, по формуле (7.1), далее находим расстояние от точки М до прямой l.

Пример 7.2.

Дано:

$l: 3x + y - 3 = 0;$

$n: 3x + 2y + 5 = 0.$

Найти:

KM.

Решение:

Выберем произвольную точку M, лежащую на n.

Для этого положим, например, в уравнении прямой $l: 3x + y - 3 = 0$ $\quad x = 0$.

Тогда y=3.

Таким образом, $M(0; 3)$ – точка, лежащая на прямой l. Найдем расстояние от M до n, воспользовавшись формулой (7.1).

Здесь A=6, B=2, C=5, x_0=0, y_0=3.

$$KM=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$KM=\frac{|6\cdot 0+2\cdot 3+5|}{\sqrt{6^2+2^2}}=\frac{11}{\sqrt{40}}\approx 1{,}74.$$

Задачи на самостоятельную подготовку

Вариант №	*l*	*n*
1	*2x+5y-5=0*	*4x+10y-21=0*
2	*3x+y-15=0*	*6x+2y-3=0*
3	*7x+y-4==0*	*21x+3y+19=0*
4	*-4x+3y+12=0*	*-8x+6y-17=0*
5	*5x-3y+24=0*	*10x-6y-13=0*
6	*-x+y-10=0*	*-5x+5y+44=0*
7	*11x+12y-36=0*	*22x+24y+17=0*
8	*-6x+y-7=0*	*-24x+4y+17=0*
9	*8x+3y+12=0*	*16x+6y-13=0*
10	*9x+4y-16=0*	*18x+8y+11=0*
11	*7x-y+4=0*	*21x-3y-19=0*
12	*4x+13y-65=0*	*8x+26y+9=0*
13	*x+11y-11=0*	*-x-11y+12=0*
14	*5x+4y-16=0*	*15x+12y+25=0*
15	*6x-7y+35=0*	*6x-7y-10=0*
16	*x-3y+24=0*	*3x-9y-16=0*
17	*x+7y-14=0*	*2x+14y+13=0*
18	*x-7y+14=0*	*2x-14y-17=0*
19	*-3x+y-27=0*	*-6x+2y+5=0*
20	*3x+4y-8=0*	*9x+12y+16=0*

21	*2x-3y+9=0*	*8x-12y-21=0*
22	*2x+7y-21=0*	*4x+14y+5=0*
23	*4x+7y-7=0*	*8x+14y+11=0*
24	*-4x+3y-6=0*	*-12x+9y+17=0*
25	*11x+2y-4=0*	*22x+4y+13=0*
26	*-9x+4y+8=0*	*-18x+8y-11=0*
27	*-5x+4y+12=0*	*-15x+12y-22=0*
28	*13x-7y+14=0*	*26x-14y-21=0*
29	*12x-5y+10=0*	*24x-10y-1=0*
30	-10x+y+7=0	*-20x+2y-13=0*

7.3. Вычисление площади горения

Территория, охваченная пожаром, имеет форму параллелограмма с вершинами *A, B, C, D*. Найти площадь пожара.

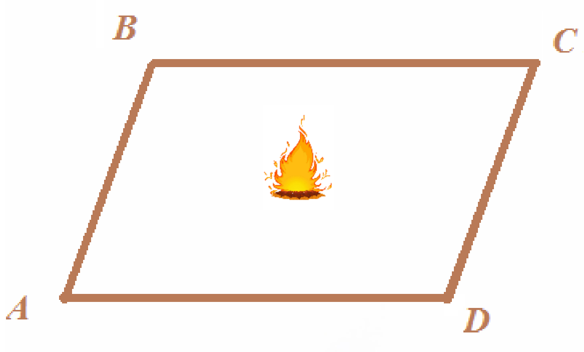


Рис. 7.3. Исходная площадь

Данная задача состоит в нахождении площади параллелограмма, заданного на плоскости координатами его вершин.

Для этого воспользуемся свойством векторного произведения двух векторов. Так как модуль векторного произведения $\bar{a} \times \bar{b}$ равен S параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу

векторах $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$, т.е.

$S = \left| \bar{a} \times \bar{b} \right|,$

то мы можем найти площадь заданной фигуры.

Пример 7.3.

Территория, захваченная пожаром, имеет форму параллелограмма с вершинами *A, B, C, D,* где *A*(-2;-4), *B*(2;8), *C*(10;2). Найти площадь пожара.

Решение.

Найдем предварительно координаты

$\bar{a} = \overline{AB}; \bar{b} = \overline{BC}$.

Полагая координату по z=0, поскольку нам заданы координаты на плоскости.

Получаем:

A(-2; -4; 0), *B*(2; 8; 0), *C*(10; 2; 0).

$\bar{a} = \overline{AB} = (2-(-2); 8-(-4); 0) = (4; 12; 0);$

$\bar{b} = \overline{BC} = (10-(-2); 2-(-4); 0) = (12; 6; 0).$

Найдем векторное произведение:

$\bar{a} \times \bar{b} = \overline{AB} \times \overline{BC}$.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 12 & 0 \\ 12 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i} \cdot 0 - \bar{j} \cdot 0 + \bar{k} \cdot (24-12) = -120\bar{k} \cdot$$

$S_{ABC} = \left| \overline{AB} \times \overline{BC} \right|;$

$S_{ABC} = \sqrt{(-120)^2} = 120(кв.ед)$

Ответ: 120 *кв.ед*.

Задачи на самостоятельную подготовку

Территория, захваченная пожаром, имеет форму параллелограмма с вершинами A,B,C. Найти площадь пожара.

№ варианта	*A*	*B*	*C*
1	(2;5)	(5;1)	(-1;2)
2	(2;5)	(5;0)	(-1;2)
3	(2;5)	(5;-1)	(-1;2)
4	(-2;4)	(4;3)	(-5;-2)
5	(-2;4)	(4;2)	(-5;-2)
6	(-2;4)	(4;1)	(-5;-2)
7	(-5;6)	(-2;0)	(-9;-2)
8	(-5;6)	(-2;-1)	(-9;-2)
9	(-5;6)	(-2;-2)	(-9;0)
10	(0;5)	(5;-2)	(-3;-4)
11	(0;5)	(5;-1)	(-3;-4)
12	(0;5)	(5;0)	(-3;-4)
13	(1;4)	(6;0)	(-3;-4)
14	(1;4)	(6;0)	(-3;-3)
15	(1;4)	(6;0)	(-3;-2)
16	(-3;3)	(6;-1)	(-1;-4)
17	(-3;3)	(6;-1)	(-1;-5)
18	(-3;3)	(6;-1)	(-1;-6)
19	(-3;0)	(0;4)	(4;-4)
20	(-3;0)	(0;4)	(4;-5)
21	(-3;0)	(0;4)	(4;-6)
22	(6;3)	(9;-2)	(0;-3)
23	(6;3)	(9;-2)	(1;-3)

24	(6;3)	(9;-2)	(1;-4)
25	(5;0)	(9;-5)	(-1;-3)
26	(5;0)	(9;-4)	(-1;-5)
27	(5;0)	(9;-6)	(-1;-8)
28	(3;2)	(9;-2)	(-1;0)
29	(3;2)	(9;-2)	(-2;0)
30	(3;2)	(9;-2)	(-3;0)

7.4. Нахождение оптимального расстояния от средств пожаротушения до двух очагов пожара

Пожарный поезд движется по железной дороге, описываемой уравнением прямой l. Очаги возгорания находятся в точках А и В. Найти координаты точки М, в которой должен остановиться поезд, чтобы начать тушить сразу два очага.

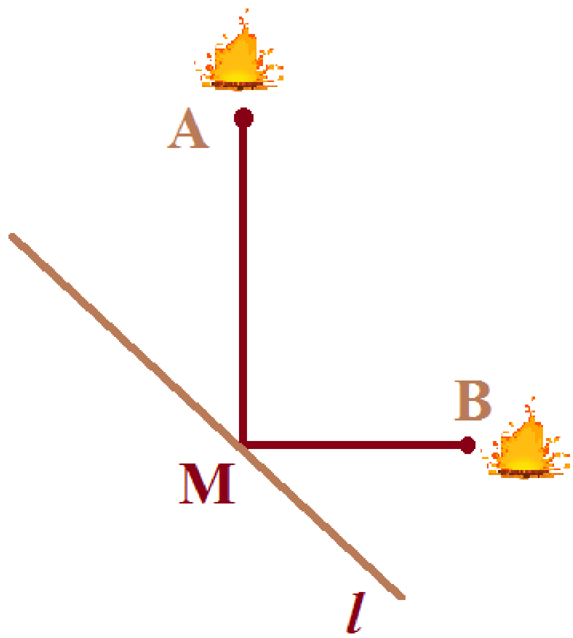


Рис. 7.4. Схема к задаче

Данная задача сводится к отысканию такой точки *M*, лежащей на прямой *l*, для которой расстояние до точек *A* и *B* будет одинаковым. Т.е. должны выполняться два условия:

1) *M* лежит на *l* (ее координаты удовлетворяют уравнению прямой *l*)

2) *MA=MB*.

Для отыскания расстояния между двумя точками воспользуемся формулой:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \qquad (7.3)$$

где $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

Пример 7.4.

В данной задаче поезд движется по железнодорожной дороге (рис. 7.4)

$l: 2x + 3y - 6 = 0.$

Очаги возгорания А(3; 5), В(2; 6).

Найти координаты точки *M*, в которой должен остановиться поезд для тушения двух пожаров.

Решение:

Обозначим координаты точки *M* через ($x_м$, $y_м$).

Тогда по (7.3)

$MA = \sqrt{(x_м - 3)^2 + (y_м - 5)^2},$

$MB = \sqrt{(x_м - 2)^2 + (y_м - 6)^2}.$

Т.к. *MA=MB*,

то $\sqrt{(x_м - 3)^2 + (y_м - 5)^2} = \sqrt{(x_м - 2)^2 + (y_м - 6)^2}.$

После возведения в квадрат и упрощения получим:

$x_M - y_M + 3 = 0.$

Точка $M(x_м, y_м)$ принадлежит прямой

$2x+y-6=0$,

следовательно, ее координаты удовлетворяют этому уравнению.

Решив систему

$$\begin{cases} x_M - y_M + 3 = 0, \\ 2x_M + y_M - 6 = 0. \end{cases}$$

находим $x_м=1$, $y_м=4$.

Ответ: $M(1;4)$

Задачи на самостоятельную подготовку

Пожарный поезд движется по железной дороге, описываемой уравнением прямой l. Очаги возгорания находятся в точках A и B. Найти координаты точки M, в которой должен остановиться поезд, чтобы расстояние до очагов возгорания было одинаковым.

№ варианта	l	A	B
1	$5x+3y-9=0$	(5;2)	(6;-2)
2	$5x+3y-9=0$	(4;7)	(6;-2)
3	$5x+3y-9=0$	(8;8)	(8;0)
4	$5x+3y-9=0$	(7;7)	(8;-2)
5	$5x+3y-9=0$	(6;4)	(9;-2)
6	$5x+3y-9=0$	(-4;2)	(0;-4)
7	$5x+3y-9=0$	(-5;2)	(1;-5)
8	$5x+3y-9=0$	(-5;-1)	(3;-8)
9	$5x+3y-9=0$	(-6;-2)	(1;-6)
10	$5x+3y-9=0$	(-7;2)	(0;-4)
11	$3x-y+3=0$	(5;5)	(4;0)
12	$3x-y+3=0$	(5;5)	(4;-3)
13	$3x-y+3=0$	(6;0)	(4;-5)
14	$3x-y+3=0$	(6;0)	(2;-4)
15	$3x-y+3=0$	(7;3)	(2;-3)
16	$3x-y+3=0$	(-3;5)	(-5;0)
17	$3x-y+3=0$	(-3;6)	(-5;-1)
18	$3x-y+3=0$	(-4;7)	(-8;-1)
19	$3x-y+3=0$	(-5;5)	(-9;-1)

20	*3x-y+3=0*	(-6;6)	(-10;0)
21	*2x-3y-6=0*	(8;-2)	(3;-8)
22	*2x-3y-6=0*	(8;-1)	(2;-8)
23	*2x-3y-6=0*	(8;0)	(3;-6)
24	*2x-3y-6=0*	(7;0)	(2;-6)
25	*2x-3y-6=0*	(7;-1)	(2;-5)
26	*2x-3y-6=0*	(7;-2)	(1;-9)
27	*2x-3y-6=0*	(3;8)	(-3;0)
28	*2x-3y-6=0*	(3;7)	(-4;-1)
29	*2x-3y-6=0*	(3;6)	(-5;-1)
30	*2x-3y-6=0*	(2;8)	(-4;2)

7.5. Нахождение минимального расстояния от средств пожаротушения до очага пожара

Пожарный состав курсирует от точки А к точке В и обратно по прямому железнодорожному пути. Пожар возникает в точке С, не принадлежащей прямой АВ. В каком месте должен остановиться поезд, (точке D) чтобы расстояние до очага пожара было минимальным.

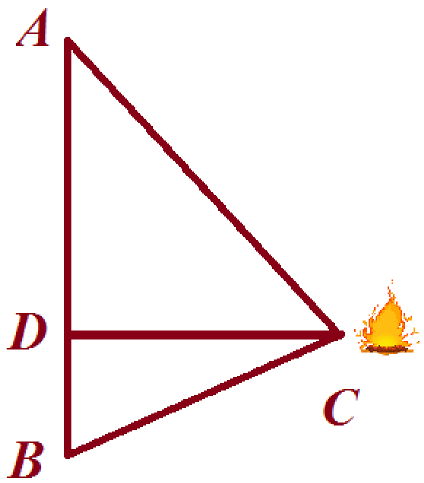


Рис. 7.5. Схема к задаче

Наименьшим расстоянием от точки до прямой является длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую (рис. 7.5). Таким образом, задача сводится к отысканию координат точки D –точки пересечения перпендикуляра, опущенного из точки C на AB и самой прямой AB. Для решения задачи воспользуемся условием перпендикулярности двух прямых:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}, \tag{7.4),}$$

где k_1 и k_2 - угловые коэффициенты прямых.

Если прямая проходит через 2 точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, то ее угловой коэффициент находят по формуле:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{7.5}$$

Для нахождения уравнения перпендикуляра CD воспользуемся уравнением прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $M_1(x_1,y_1)$:

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{7.6}$$

Уравнение прямой AB найдем, исходя из того, что уравнение прямой, проходящей через 2 точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ записывается в виде

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{7.7}$$

Далее координаты искомой точки D – это координаты пересечения CD и AB находятся из решения системы двух уравнений.

Пример 7.5.

Пусть в условиях данной задачи A(0;1), B(6;5), C(12;-1). Найти координаты точки D , такой, чтобы CD было минимальным.

Решение:

По формуле (7.5) найдем угловой коэффициент прямой AB

$$к_{AB} = \frac{5-1}{6-0} = \frac{2}{3}$$

Т.к. наименьшим расстоянием от точки до прямой является перпендикуляр, то CD⊥AB. Тогда в силу условия перпендикулярности (7.4) угловой коэффициент CD

$$\kappa_{CD} = -\frac{1}{\kappa_{AB}} = -\frac{3}{2}$$

Уравнение перпендикуляра CD, проходящего через точку C, имеет вид: (7.6)

$$y-(-1)=-\frac{3}{2}(x-12)$$

или

$$3x+2y-34=0.$$

Точка D является точкой пересечения двух прямых: AB и CD. Найдем уравнение прямой AB, воспользовавшись (7.7):

$$\frac{x-0}{6-0}=\frac{y-1}{5-1}`$$

или $2x-3y+3=0.$

Координаты точки D найдем, решив систему из 2-х уравнений, описывающих прямые CD и AB:

$$\begin{cases} 3x+2y-34=0, \\ 2x-3y+3=0. \end{cases}.$$

Получаем: $x=7\frac{5}{13}$; $y=5\frac{12}{13}$.

Ответ: $D\left(7\frac{5}{13}; 5\frac{12}{13}\right)$.

Задачи на самостоятельную подготовку

Пожарный состав курсирует от точки A к точке B и обратно. Пожар возникает в точке C, не принадлежащей прямой AB. Найти координаты точки D – места остановки поезда, такой, чтобы CD было минимальным.

№ варианта	A	B	C
1	(-1;4)	(4;-4)	(7;2)
2	(-1;4)	(4;-4)	(7;3)
3	(-1;4)	(4;-4)	(7;0)
4	(-1;4)	(4;-4)	(5;5)
5	(-1;4)	(4;-4)	(5;4)
6	(-1;4)	(4;-4)	(5;3)
7	(-1;4)	(4;-4)	(-6;-4)
8	(-1;4)	(4;-4)	(-6;-5)
9	(-1;4)	(4;-4)	(-6;-3)
10	(-2;-5)	(7;2)	(-3;2)
11	(-2;-5)	(7;2)	(-3;1)
12	(-2;-5)	(7;2)	(-3;0)
13	(-2;-5)	(7;2)	(-2;7)
14	(-2;-5)	(7;2)	(-2;8)
15	(-2;-5)	(7;2)	(-2;6)
16	(-2;-5)	(7;2)	(5;-7)
17	(-2;-5)	(7;2)	(6;-7)
18	(-2;-5)	(7;2)	(7;-7)
19	(-3;2)	(6;0)	(3;9)
20	(-3;2)	(6;0)	(3;8)
21	(-3;2)	(6;0)	(3;7)

22	(-3;2)	(6;0)	(2;8)
23	(-3;2)	(6;0)	(2;7)
24	(-3;2)	(6;0)	(2;6)
25	(-3;2)	(6;0)	(1;-6)
26	(-3;2)	(6;0)	(0;-6)
27	(-3;2)	(6;0)	(-1;-7)
28	(-3;1)	(6;0)	(2;-7)

7.6. Определение координат эпицентра землетрясения

В результате землетрясения здание, имеющее форму треугольной призмы, подверглось разрушению (Рис. 7.6). Требуется найти эпицентр землетрясения (Рис. 7.7), если известно, что он находится в центре тяжести основания здания.

Рис. 7.6. Пример рассматриваемого объекта

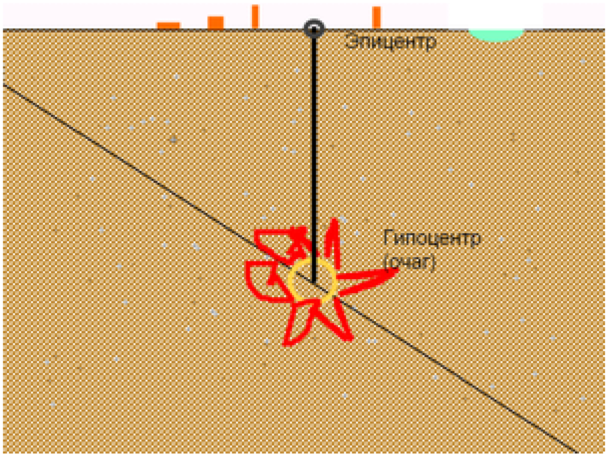


Рис. 7.7. Пример рассматриваемого объекта

Рис. 7.8. Разрушение в результате землетрясения

Приведем математическую формулировку задачи.

Предположим треугольник основания имеет вершины A, B и C. Требуется определить координаты места возникновения разрушения – точки M, если известно, что оно находится в точке пересечения медиан треугольника ABC.

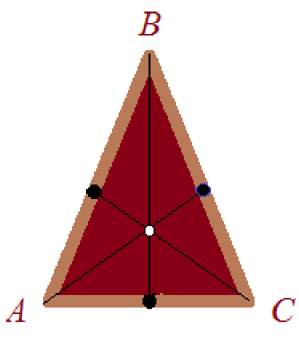


Рис. 7.9. Схема к задаче

Данная задача сводится к отысканию координат точки пересечения медиан треугольника при его заданных вершинах (рис. 7.9). Здесь необходимо помнить, что точка пересечения медиан делит саму медиану в соотношении 2:1, считая от вершины. Координаты точки C($\bar{x},\bar{y}$). делящей отрезок между точками A(x_1,y_1) и B(x_2,y_2) в заданном соотношении λ (λ= ±|AC|:|CB|), определяются по формулам

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \bar{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (7.8).$$

Пример 7.6.

A(2;2), B(-2;-8), C(-6;-2). Определить координаты эпицентра землетрясения – точки M, если M – точка пересечения медиан ΔABC.

Решение:

Находим координаты точки D – середины отрезка AB, воспользовавшись формулой (7.8), (здесь |AD|:|DB|=1:1, λ=1):

$$\bar{x}_D = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \bar{y}_D = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}.$$

$$\bar{x}_D = \frac{2-2}{2} = 0, \bar{y}_D = \frac{2-8}{2} = -3.$$

Точка M, в которой пересекаются медианы, делит CD в отношении 2:1, считая от точки C. (|CM|:|MD|=2:1, λ=2)

Тогда

$$x_M = \frac{-6+0}{3} = -2, y_M = \frac{-2-6}{3} = -2\frac{2}{3}.$$

Ответ: $M\left(-2; -2\frac{2}{3}\right).$

Задачи на самостоятельную подготовку

В результате землетрясения здание, имеющее форму треугольной призмы, подверглось разрушению. Требуется найти эпицентр землетрясения (координаты точки М), если известно, что он находится в центре тяжести основания здания, имеющего форму треугольника с вершинами А, В и С.

№ варианта	A	B	C
1	(-3;2)	(3;9)	(6;0)
2	(-3;2)	(3;8)	(6;0)
3	(-3;2)	(3;7)	(6;0)
4	(-3;2)	(2;9)	(6;0)
5	(-3;2)	(2;8)	(6;0)
6	(-3;2)	(2;7)	(6;0)
7	(-3;2)	(3;9)	(6;1)
8	(-3;2)	(3;9)	(6;-1)
9	(-3;2)	(3;9)	(6;2)
10	(-2;-5)	(-1;4)	(7;2)
11	(-2;-5)	(-1;4)	(7;1)
12	(-2;-5)	(-1;4)	(7;0)
13	(-2;-5)	(-1;5)	(7;2)
14	(-2;-5)	(-2;5)	(7;2)
15	(-2;-5)	(-1;6)	(7;2)
16	(-3;-5)	(-1;4)	(7;2)
17	(-3;-6)	(-1;4)	(7;2)
18	(-4;-5)	(-1;4)	(7;2)
19	(-2;4)	(6;5)	(6;-3)
20	(-2;4)	(6;5)	(7;-3)
21	(-2;4)	(6;5)	(5;-3)

22	(-2;4)	(5;5)	(6;-3)
23	(-2;4)	(5;4)	(6;-3)
24	(-2;4)	(4;6)	(6;-3)
25	(-3;3)	(6;5)	(6;-3)
26	(-3;2)	(6;5)	(6;-3)
27	(-3;0)	(6;5)	(6;-3)
28	(2;7)	(11;4)	(3;-3)
29	(2;7)	(11;4)	(3;-2)
30	(2;7)	(11;4)	(3;-1)

7.7. Решение задачи пересечения маршрутов трех самолетов, вылетевших для тушения лесного пожара

Из трех городов вылетели самолеты с запасом воды на борту для тушения лесного пожара. Они могут следовать по своему эшелону, который лежит в плоскости

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ для первого самолета, в плоскости

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ для второго самолета и

$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ для третьего самолета.

Требуется проверить, существует ли такая точка, в которой все три самолета могут сбросить свой запас воды в одно и то же место. Найти координаты этой точки.

Краткие теоретические сведения.

Для решения поставленной задачи необходимо воспользоваться аппаратом линейной алгебры, а именно методом решения систем линейных уравнений. Одним из методов является использование формул Крамера.

Пусть дана линейная система трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

Составляем определитель системы из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

Составляем определитель при неизвестной X, заменяя столбец коэффициентов при «X» на столбец свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Аналогично, находим определитель при неизвестной «y»:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

и определитель при неизвестной «z»:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда, решение системы будет иметь вид:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Рассмотрим пример решения задачи.

Даны конкретные плоскости, в которой могут лететь самолеты:

$$x + 2y + z = 4,$$
$$3x - 5y + 3z = 1,$$
$$2x + 7y - z = 8.$$

Составляем линейную систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

Находим определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&-5&3\\2&7&-1\end{vmatrix}==1\cdot\begin{vmatrix}-5&3\\7&-1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}3&3\\2&-1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}3&-5\\2&7\end{vmatrix}=33,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}4&2&1\\1&-5&3\\8&7&-1\end{vmatrix}==4\cdot\begin{vmatrix}-5&3\\7&-1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}1&3\\8&-1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1&-5\\8&7\end{vmatrix}=33,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&4&1\\3&1&3\\2&8&-1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&3\\8&-1\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}3&3\\2&-1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}3&1\\2&8\end{vmatrix}=33,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&4\\3&-5&1\\2&7&8\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-5&1\\7&8\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}3&1\\2&8\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}3&-5\\2&7\end{vmatrix}=33,$$

Следовательно, координаты точки, в которой все три самолета могли сбросить свои запасы воды будут:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=1,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=1.$$

7.8. Проверка соблюдения норм пожарной безопасности по площади легко разрушаемых конструкций

В помещениях категории А и Б следует предусмотреть наличие наружных легко сбрасываемые ограждающих конструкций. Площадь легко сбрасываемых конструкций определятся расчетом:

$$S=0{,}03\cdot V_n,$$

если категория помещения по взрывопожарной и пожарной опасности Б.

$$S=0{,}05\cdot V_n,$$

если категория помещения по взрывопожарной и пожарной опасности А.

Помещение имеет форму параллелепипеда, для которого известны координаты вершин. В проекте данного объекта площадь легкосбрасываемых конструкций составляет $S\ (м^2)$.

Требуется определить, достаточно ли данных площадей для соблюдения норм пожарной безопасности.

Краткие теоретические сведения.

Для проверки соблюдения норм пожарной безопасности по площади легко сбрасываемых наружных ограждающих конструкций необходимо знать объем помещения. Если помещение имеет форму параллелепипеда его объем можно подсчитать как модуль смешанного произведения трех векторов, являющихся ребрами параллелепипеда (рис. 3.8).

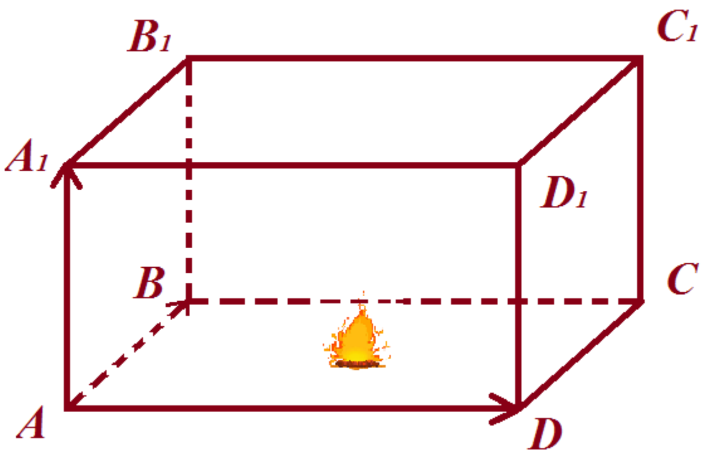


Рис. 7.8. Схема к задаче

$$V_{паралл} = \left|\overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AA_1}\right|.$$

Если векторы $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA_1}$ заданы своими координатами:

$$\overline{AB} = (x_1;\, y_1;\, z_1), \overline{AD} = (x_2;\, y_2;\, z_2); \quad \overline{AA_1} = (x_3;\, y_3;\, z_3),$$

тогда смешанное произведение этих векторов находится по следующей формуле:

$$\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA_1} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Значение определителя третьего порядка можно найти как сумму произведений элементов какой-либо строки или столбца на их алгебраические дополнения.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. = x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3.$$

Напомним, алгебраическим дополнением A_{11} для элемента a_{11} называется минор, получающийся путем вычеркивания строки и столбца, в котором стоит данный элемент и взятый со знаком «+», если сумма индексов элемента четная, и со знаком «–», если сумма индексов соответствующего элемента – нечетная.

Определив объем помещения, можно подсчитать необходимую площадь наружного легко сбрасываемого ограждения и сравнить ее с заданной величиной.

Пример решения задачи.

Помещение категории А имеет форму параллелепипеда, у которого известны координаты вершин

$$A(1;1;1), B(6;11;21), D(11;21;11), A_1(6;16;21).$$

Площадь остекления данного помещения равна 19 (м^2). Требуется определить достаточно ли данной площади остекления для соблюдения норм пожарной безопасности.

Решение:

Определяем координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA_1}$:

$$\overline{AD} = (10;20;10), \overline{AB} = (5;10;20), \ \overline{AA_1} = (5;15;20).$$

Находим смешанное произведение векторов $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA_1}$.

$$\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AA_1}=\begin{vmatrix}10 & 20 & 10\\ 5 & 10 & 20\\ 5 & 15 & 20\end{vmatrix}=10\cdot\begin{vmatrix}10 & 20\\ 15 & 20\end{vmatrix}-20\cdot\begin{vmatrix}5 & 20\\ 5 & 20\end{vmatrix}+10\cdot\begin{vmatrix}5 & 10\\ 5 & 15\end{vmatrix}=-750$$

Объем помещения равен модулю смешанного произведения, т.е.

$$V=750(м^3)$$

Для помещений категории А необходимая площадь остекления равна

$$S=0{,}05\cdot V_n\cdot$$

$$S=0{,}05\cdot 750=37{,}5$$

$S=37{,}5(м^2)$.

По условию задачи площадь остекления данного помещения равна 19(м^2), следовательно это помещение по данному критерию удовлетворяет требованиям пожарной безопасности.

Задачи на самостоятельную подготовку

Помещение имеет форму параллелепипеда, для которого известны координаты вершин. В проекте данного объекта площадь легкосбрасываемых конструкций составляет S $(м^2)$.

Требуется определить, достаточно ли данных площадей для соблюдения норм пожарной безопасности.

1. O (1,2,3), O$'$ (9,8,9), A (10,5,4), C (8,7,6)
S=4 м^2
2. O (1,3,4), O$'$ (10,11,5), A (9,8,7), C (6,4,8)
S=3,5 м^2
3. O (2,1,2), O$'$ (12,9,7), A (4,3,4), C (8,10,2)
S=4,5 м^2
4. O (3,1,1), O$'$ (8,2,4), A (2,7,6), C (7,11,2)
S=7 м^2

5. O (2,2,2), O$'$ (7,9,12), A (2,3,5), C (12,11,10)

S=9 м^2

6. O (1,3,3), O$'$ (6,12,7), A (3,3,8), C (11,8,8)

S=11 м^2

7. O (2,3,3), O$'$ (5,11,6), A (7,15,1), C (12,3,3)

S=3,5 м^2

8. O (6,1,1), O$'$ (7,8,11), A (7,12,10), C (13,11,6)

S=8,5 м^2

9. O (3,1,1), O$'$ (8,12,10), A (8,10,11), C (12,14,5)

S=7,5 м^2

10. O (2,2,1), O$'$ (7,15,2), A (8,7,5), C (10,7,5)

S=7 м^2

11. O (2,2,2), O$'$ (7,3,5), A (7,11,3), C (12,5,11)

S=6,5 м^2

12. O (1,2,2), O$'$ (8,12,5), A (5,2,10), C (3,3,8)

S=6 м^2

13. O (1,1,3), O$'$ (7,15,3), A (8,4,11), C (11,2,4)

S=6,5 м^2

14. O (2,1,1), O$'$ (8,12,13), A (16,5,7), C (7,12,7)

S=9 м^2

15. O (1,1,4), O$'$ (5,8,12), A (7,11,13), C (5,7,9)

S=9,5 м^2

16. O (1,2,1), O$'$ (7,5,3), A (8,12,10), C (3,8,6)

S=4,3 м^2

17. O (1,3,2), O$'$ (7,8,7), A (7,8,12), C (8,11,3)

S=3,8 м^2

18. O (2,1,2), O$'$ (6,12,13), A (11,7,5), C (6,5,10)

S=4,7 м^2

19. O (3,1,1), O' (5,14,11), A (10,2,4), C (3,5,12)

S=5,3 $м^2$

20. O (2,1,1), O' (6,11,4), A (5,12,6), C (3,16,11)

S=4,7 $м^2$

21. O (3,1,1), O' (8,12,16), A (7,13,8), C (6,8,9)

S=4,9 $м^2$

22. O (2,1,2), O' (7,13,11), A (5,4,12), C (11,9,7)

S=3,8 $м^2$

23. O (1,1,2), O' (6,12,5), A (4,8,11), C (10,7,6)

S=4,3 $м^2$

24. O (1,3,1), O' (7,12,7), A (15,11,6), C (5,5,1)

25. O (2,1,1), O' (8,9,10), A (7,8,9), C (11,10,6)

S=7,2 $м^2$

26. O (3,2,1), O' (7,12,11), A (5,4,8), C (9,7,5)

S=7,4 $м^2$

27. O (2,5,2), O' (7,13,8), A (6,18,15), C (8,6,11)

S=5,3 $м^2$

28. O (2,1,3), O' (8,14,6), A (5,12,11), C (8,13,11)

S=5,1 $м^2$

29. O (2,1,1), O' (9,11,4), A (7,12,5), C (8,15,3)

S=3,8 $м^2$

30. O (2,2,3), O' (11,12,7), A (8,13,18), C (11,5,3)

S=6,8 $м^2$

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

А, α альфа	В, β бета	Г, γ гамма	Δ, δ дельта
Е, ε эпсилон	Z, ζ дзета	Н, η эта	Θ, θ тета
I, ι йота	К, κ каппа	Λ, λ лямбда	М, μ мю
N, ν ню	Ξ, ξ кси	О, o омикрон	Π, π ри
Р, ρ ро	Σ, σ сигма	Т, τ тау	Υ, υ ипсилон
Φ, ϕ фи	Х, χ хи	Ψ, ψ пси	Ω, ω омега

Приложение 2.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ №1 по теме:

«Понятие матрицы. Определитель матрицы. Действия над матрицами. Обратная матрица».

№1. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & i \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ j & -1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & j & 0 \\ k & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} i & 5 & 9 \\ -2 & 4 & k \end{pmatrix}$$

Найдите:

1) определители матриц: A, B, C
2) $A^т$, $B^т$, $C^т$
3) $3A–2B+A^т$; $3C–C^т$
4) произведения матриц: B·A, A·D, D·C
5) обратные матрицы для A и C. Выполните проверку.

№ варианта (№ по списку в журнале)	*i*	*j*	*k*
1	1	2	**3**
2	5	4	**-2**
3	4	8	**-3**
4	2	6	**4**
5	3	7	**5**
6	6	5	**6**
7	8	4	**1**
8	-1	2	**0**
9	5	3	**-1**
10	8	-3	**2**
11	9	-2	**4**
12	6	1	**5**
13	7	-1	**0**
14	4	6	**-2**
15	6	5	**-3**
16	8	-4	**6**
17	-2	-3	**4**
18	3	2	**5**

19	-1	0	**6**
20	0	7	**-8**
21	4	-5	**2**
22	-2	4	**-3**
23	-3	3	**-1**
24	7	2	**1**
25	**5**	**1**	**0**

№2. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы.

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ 6 & 15 & -6 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ №2 по теме: «Системы линейных уравнений».

№1. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Решить систему:

1) с помощью формул Крамера;

2) матричным методом;

3) методом Гаусса.

№	Задание	Задание
1.	$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y+z=0 \\ x-y+2z=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ x+3y+2z=1 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+y+2z=-2 \\ -x+2y+3z=5 \\ -2x+3y+z=8 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 4x+2y+z=31 \\ 2x+y+5z=29 \\ x-y+3z=10 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+3y+2z=1 \\ 4x+5y+2z=3 \\ 3x+2y+3z=5 \end{cases}$
4.	$\begin{cases} 6x+9y+4z=-8 \\ -x-y+z=2 \\ 10x+16y+7z=-15 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 3x+4y+3z=-6 \\ 9x+8y+5z=-10 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} -x+3y-2z=2 \\ 2x-y+3z=1 \\ 2x-3y+4z=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+2y+2z=-1 \\ 2x+5y+3z=-6 \\ 3x+4y+4z=-5 \end{cases}$
6.	$\begin{cases} 2x+4y+3z=0 \\ x+5y+4z=-3 \\ -3x+5y+3z=-11 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+5z=-8 \\ x+4y+8z=-15 \\ x+2y+6z=-13 \end{cases}$

7.	$\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$	$\begin{cases} -2x+3y+4z=5 \\ 3x-y-3z=-1 \\ -x+2y+2z=3 \end{cases}$
8.	$\begin{cases} 3x+3y+z=8 \\ 7x+6y+2z=18 \\ 7x+9y+2z=21 \end{cases}$	$\begin{cases} -x+y+2z=2 \\ x+3y-z=3 \\ -x+4y-5z=-2 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$	$\begin{cases} 7x+2y+3z=15 \\ 5x-3y+2z=15 \\ 10x-11y+5z=36 \end{cases}$
10.	$\begin{cases} 2x+3y+4z=1 \\ 2x+5y+4z=3 \\ 3x+2y+3z=5 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-4y+z=-2 \\ 4x-2y+5z=0 \\ 5x-2y+3z=8 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} x+4y+5z=21 \\ 5x-2y+z=-7 \\ 5x+3y+4z=16 \end{cases}$	$\begin{cases} -4x+5y+2z=13 \\ -x-2y-z=-7 \\ x+5y-4z=42 \end{cases}$
12.	$\begin{cases} -4x-y-z=-14 \\ 2x-3y+5z=32 \\ -x+4y+z=-7 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x-y-z=25 \\ y-2z=-9 \\ -2x-y+2z=-1 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} 2x+3y-2z=-8 \\ 3y-2z=-4 \\ -x-y=-4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y-3z=-13 \\ x-y+z=0 \\ -3x+y-4z=-8 \end{cases}$
14.	$\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 5x+3y+4z=-5 \\ y+z=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y-3z=-20 \\ -x+2y+4z=22 \\ x+5y-3z=15 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} 3x-2y+5z=7 \\ -x-4y+4z=16 \\ 2x+2y-z=1 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x-3y+5z=-35 \\ 4x-3y+3z=-27 \\ x-2y+z=-14 \end{cases}$

16.	$\begin{cases} 5x+3y-2z=-16 \\ x+4y-4z=-4 \\ -4x-y+5z=32 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+2y-z=-3 \\ 2x-2y-3z=3 \\ -3x+2y-z=-8 \end{cases}$
17.	$\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$
18.	$\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=4 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$
19.	$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=6 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-y+3z=-4 \\ 3x+5y+z=4 \end{cases}$
20.	$\begin{cases} 3x-y+z=4 \\ 2x-5y-3z=-17 \\ x+y-z=-0 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+4z=31 \\ 5x+y+2z=29 \\ 3x-y+z=10 \end{cases}$
21.	$\begin{cases} 7x-y=1 \\ 2x+z=-1 \\ 4x-2y-3z=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x+5y-z=7 \\ 2x-y-z=4 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$
22.	$\begin{cases} x+5y+z=-7 \\ 2x-y-z=0 \\ x-2y-z=2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+4z=20 \\ 2x-y-3z=3 \\ 3x+4y-5z=-8 \end{cases}$
23.	$\begin{cases} 3x-y=5 \\ -2x+y+z=0 \\ 2x-y+4z=15 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-6z=-1 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$
24.	$\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=16 \\ 3x-2y-5z=12 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+3z=7 \\ x+3y-2z=0 \\ 2y-z=2 \end{cases}$

25.	$\begin{cases} 2x+y-z=-1 \\ -3x-y-5z=5 \\ x-2y+5z=9 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$
26.	$\begin{cases} 11x+3y-z=2 \\ 2x+5y-5z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ x+3z=1 \\ -x-3y+2z=2 \end{cases}$
27.	$\begin{cases} 3x-2y=-5 \\ x-2y+z=-1 \\ x+3y-z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x-3y+z=-2 \\ x-2y-4z=-11 \\ -2x-y=1 \end{cases}$
28.	$\begin{cases} -3x+y+3z=10 \\ -2x-z=-4 \\ 2x-y+3z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y-6z=-15 \\ 3x-y+z=-2 \\ -x+3z=7 \end{cases}$
29.	$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+2y-z=6 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+3z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$
30.	$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=-5 \\ x+3z=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ x+y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-3 \end{cases}$

№2. Решить уравнение. Сделать проверку.

1. $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$; 2. $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$; 3. $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$;

4. $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -3 \\ 1 & x+4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$; 5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & x+1 & 4 \\ 1 & 2 & x+4 \end{vmatrix}=0$; 6. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & x-1 & x-1 \\ x+2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0$;

7. $\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 2+x & -1 & 3 \end{vmatrix}=0$; 8. $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 2 \\ 2x+1 & 1 & x+3 \end{vmatrix}=0$; 9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+4 & 1 \\ x-1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0$;

10. $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 3 & x-1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; 11. $\begin{vmatrix} x+2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ x-2 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = 0$; 12. $\begin{vmatrix} x & 4 & 2 \\ 1 & x+1 & 0 \\ x-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

13. $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ 2 & x+2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$; 14. $\begin{vmatrix} x & x & -2 \\ 1 & x+5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$; 15. $\begin{vmatrix} 0 & x+1 & x-3 \\ 0 & x+1 & 3 \\ 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0$;

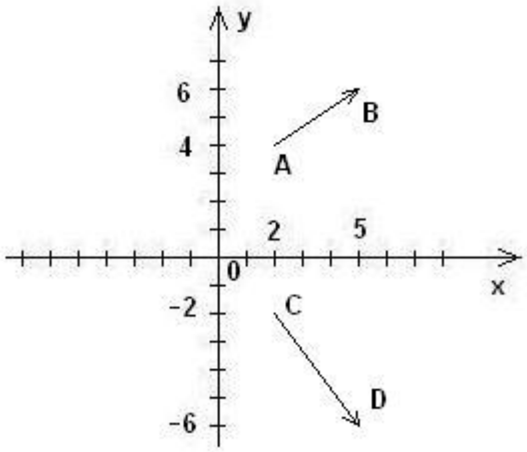
16. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & x-1 & x-2 \\ x+2 & -1 & -x-1 \end{vmatrix} = 0$; 17. $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ x+2 & x+2 & 1 \\ x+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$; 18. $\begin{vmatrix} 2x-1 & 3 & 3 \\ x & 2 & 2 \\ 2x+1 & 1 & x+3 \end{vmatrix} = 0$;

19. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & x+3 & 1 \\ x-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$; 20. $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ 3 & x-1 & 3 \\ 4 & z & 4 \end{vmatrix} = 0$.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ №3 по теме: «Векторы».

Вариант 1.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\left|\overline{AB}\right|$, $\left|\overline{CD}\right|$.

3. Найдите $\cos\angle\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)$.

4. Найдите векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ векторов, если $\overline{a}=(5;2;0)$ и $\overline{b}=(3;-1;2)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{a}=(5;2;0)$, $\overline{b}=(2;1;-2)$, $\overline{c}=(1;1;1)$.

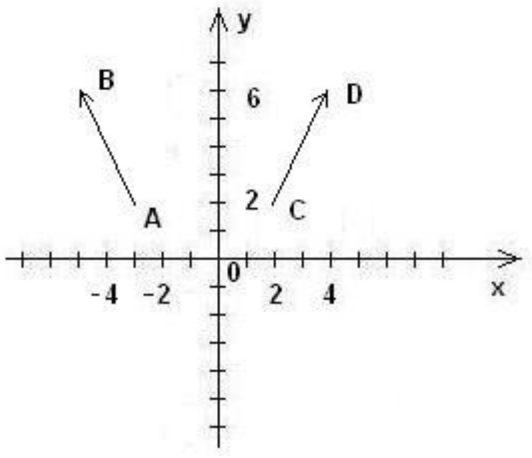
6. Разложите вектор $\overline{c}=(2;0)$ по векторам $\overline{a}=(1;1)$ и $\overline{b}=(1;-1)$.

7. Найдите длину вектора $\overline{p}+2\overline{q}$, если

$$\overline{p}=\overline{a}-\overline{b},\ \overline{q}=\overline{a}+2\overline{b},\ \left|\overline{a}\right|=1,\ \left|\overline{b}\right|=3,\ \angle\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

Вариант 2.

1. . Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\left|\overline{AB}\right|$, $\left|\overline{CD}\right|$.

3. Найдите $\overline{AB} - 3 \cdot \overline{CD}$.

4. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (4; -3; 1)$ и $\overline{b} = (2; 0; 1)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов

$\overline{a} = (3; -1; 2)$, $\overline{b} = (5; 0; -2)$, $\overline{c} = (2; 1; 0)$.

6.Разложите вектор $\overline{c} = (4; 5)$ по векторам

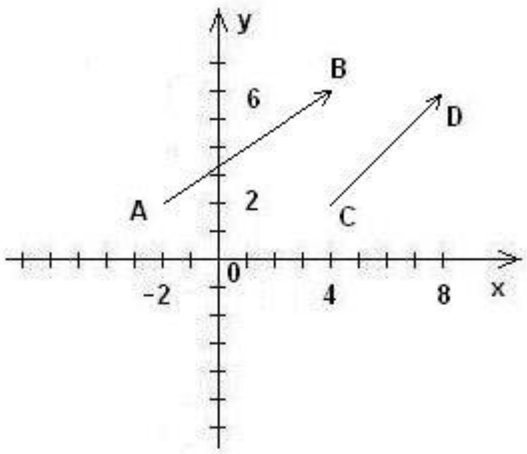
$\overline{a} = (5; 4)$ и $\overline{b} = (1; -1)$.

7. Найдите длину вектора $\overline{p} \times \overline{q}$, если

$\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b},\ \overline{q} = \overline{a} + 3\overline{b},\ \left|\overline{a}\right| = 2,\ \left|\overline{b}\right| = 5,\ \angle(\overline{a}, \overline{b}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 3.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\overline{CD} \cdot \overline{AB}$.

3. Найдите $\cos\angle\left(\overline{CD}, \overline{AB}\right)$.

4. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a} = (3; 1; -1)$ и $\overline{b} = (-2; 0; 3)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов

$\overline{a} = (2; -1; 1)$, $\overline{b} = (0; -3; -1)$, $\overline{c} = (2; 3; -3)$.

6. Разложите вектор $\overline{c} = (3; 6)$ по векторам

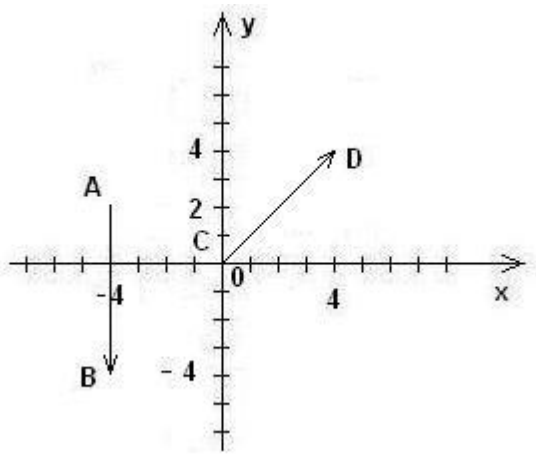
$\overline{a} = (5; 4)$ и $\overline{b} = (1; -1)$.

7. Найдите длину вектора $\overline{p} \times \overline{q}$, если

$$\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b},\ \overline{q} = 3\overline{a} - 2\overline{b},\ \left|\overline{a}\right| = 2,\ \left|\overline{b}\right| = 1, \angle\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Вариант 4.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\left|\overline{AB}\right|$, $\left|\overline{CD}\right|$.

3. Найдите $\overline{AB}+\overline{CD}$.

4. Являются ли векторы

$\overline{a}=(5;1;-4)$ и $\overline{b}=(-15;-3;12)$ параллельными?

5. Найдите смешанное произведение векторов

$\overline{a}=(7;1;0)$, $\overline{b}=(4;2;1)$, $\overline{c}=(1;-1;1)$.

6. Разложите вектор $\overline{c}=(2;7)$ по векторам

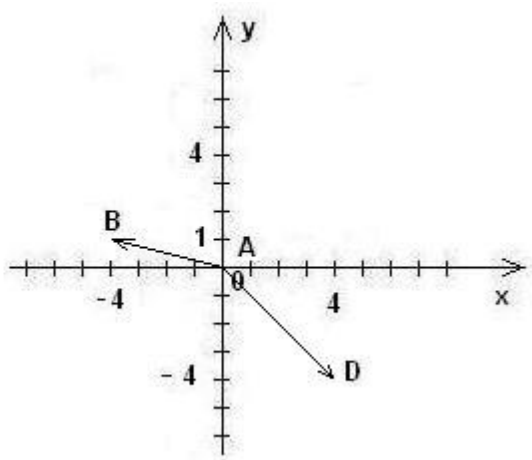
$\overline{a}=(5;4)$ и $\overline{b}=(1;-1)$.

7. Найдите длину вектора $\overline{p}\times\overline{q}$, если

$\overline{p}=2\overline{a}-3\overline{b},\ \overline{q}=3\overline{a}-2\overline{b},\ \left|\overline{a}\right|=3,\ \left|\overline{b}\right|=4,\ \angle\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 5.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$.

3. Найдите $2 \cdot \overline{AB} + \overline{AD}$.

4. Найдите $\left|\overline{AB} \times \overline{CD}\right|$, если

$\overline{AB} = (1;0;-1)$ и $\overline{CD} = (3;2;-2)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов

$\overline{a} = (3;2;0)$, $\overline{b} = (2;-1;1)$, $\overline{c} = (4;1;1)$.

6.Разложите вектор $\overline{c} = (1;8)$ по векторам

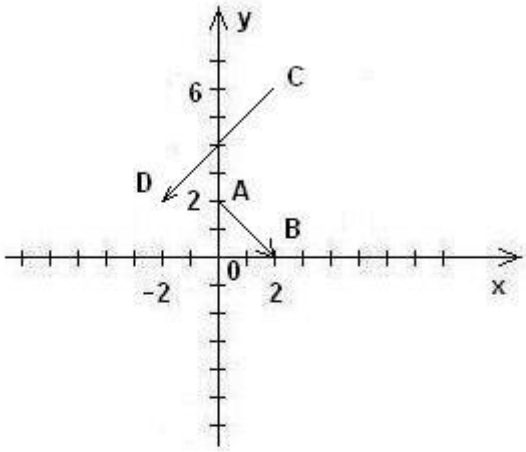
$\overline{a} = (5;3)$ и $\overline{b} = (1;-1)$.

7. Найдите длину вектора $\overline{p} \times \overline{q}$, если

$\overline{p} = 5\overline{a} - 2\overline{b}$, $\overline{q} = 5\overline{a} + 2\overline{b}$, $\left|\overline{a}\right| = 2$, $\left|\overline{b}\right| = 3$, $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Вариант 6.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$.

3. Найдите $\cos\angle\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right)$.

4. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (0;0;3)$ и $\overline{b} = (2;1;-1)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов

$\overline{a} = (2;0;2)$, $\overline{b} = (1;-1;1)$, $\overline{c} = (-3;0;1)$.

6.Разложите вектор $\overline{c} = (0;9)$ по векторам

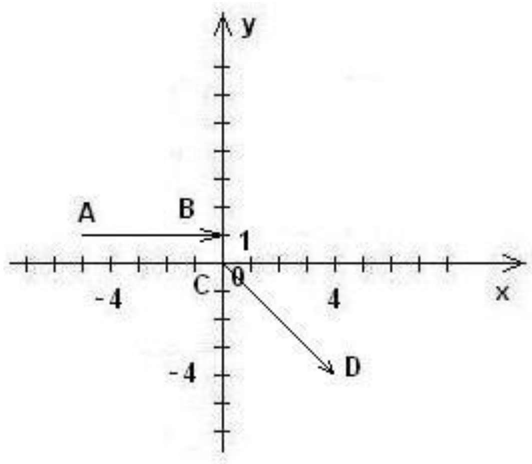
$\overline{a} = (5;4)$ и $\overline{b} = (1;-1)$.

7. Найдите длину вектора $\overline{p} - 2\overline{q}$, если

$\overline{p} = \overline{a} - 2\overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a} + 3\overline{b}$, $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 4$, $\angle\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 7.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$.

3. Найдите $2 \cdot \overline{AB} + \overline{CD}$.

4. Найдите $\left|\overline{AB} \times \overline{CD}\right|$, если

$\overline{AB} = (1; 0; -1)$ и $\overline{CD} = (3; 2; -2)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов

$\overline{a} = (3; 2; 0)$, $\overline{b} = (2; -1; 1)$, $\overline{c} = (4; 1; 1)$.

6.Разложите вектор $\overline{c} = (-1; 10)$ по векторам

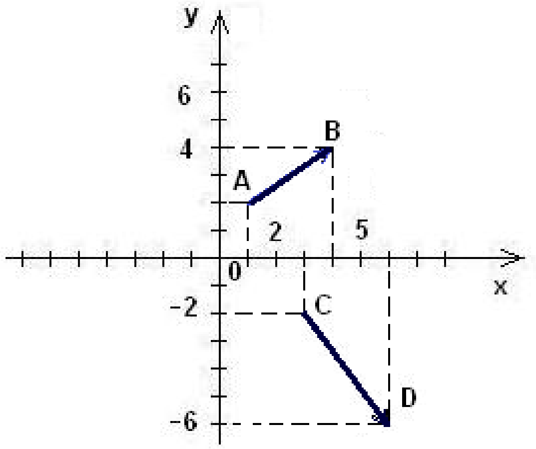
$\overline{a} = (5; 4)$ и $\overline{b} = (1; -1)$.

7. Найдите длину вектора $2\overline{p} - \overline{q}$, если

$\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b}, \overline{q} = 2\overline{a} + 3\overline{b}, \left|\overline{a}\right| = 1, \left|\overline{b}\right| = 4, \angle\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Вариант 8.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\left|\overline{AB}\right|$, $\left|\overline{CD}\right|$.

3. Найдите $\cos\angle\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)$.

4. Найдите векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ векторов

$\overline{a}=(-5;\,2;-1)$ и $\overline{b}=(3;-1;2)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов

$\overline{a}=(-5;\,2;-1)$, $\overline{b}=(2;-1;-2)$, $\overline{c}=(-1;1;-2)$.

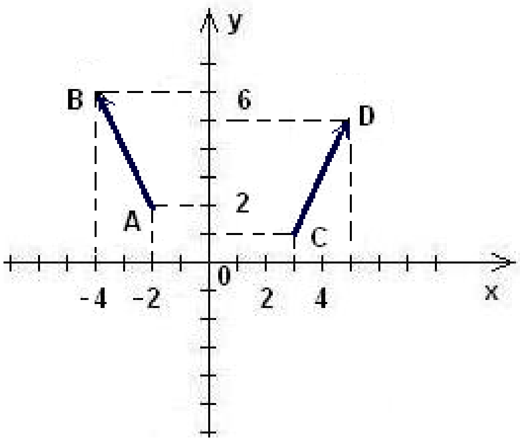
6.Разложите вектор $\overline{c}=(-2;11)$ по векторам $\overline{a}=(3;4)$ и $\overline{b}=(1;-1)$.

7. Найдите длину вектора $2\overline{p}-\dfrac{\overline{q}}{2}$, если

$\overline{p}=3\overline{a}-2\overline{b},\ \overline{q}=2\overline{a}+4\overline{b},\ \left|\overline{a}\right|=2,\ \left|\overline{b}\right|=4,\ \angle\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\dfrac{5\pi}{6}.$

Вариант 9.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\left|\overline{AB}\right|$, $\left|\overline{CD}\right|$.

3. Найдите $\overline{AB} - 3 \cdot \overline{CD}$.

4. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (-1; -3; 2)$ и $\overline{b} = (2; 0; -1)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов

$\overline{a} = (-3; -1; 2)$, $\overline{b} = (5; 0; -2)$, $\overline{c} = (2; -3; 0)$.

6. Разложите вектор $\overline{c} = (-3; 12)$ по векторам

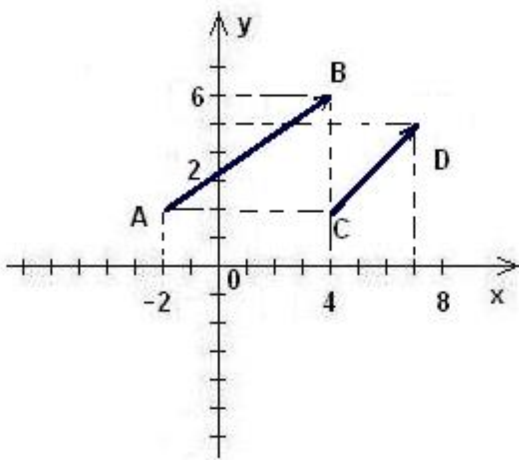
$\overline{a} = (5; 4)$ и $\overline{b} = (1; -1)$.

7. Найдите длину вектора $2\overline{p} - \dfrac{\overline{q}}{3}$, если

$\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b}$, $\overline{q} = 3\overline{a} + 6\overline{b}$, $\left|\overline{a}\right| = 2$, $\left|\overline{b}\right| = 4$, $\angle\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \dfrac{7\pi}{6}$.

Вариант 10.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\left|\overline{AB}\right|$, $\left|\overline{CD}\right|$.

3. Найдите $\cos\angle\left(\overline{CD},\overline{AB}\right)$.

4. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}=(3;-2;4)$ и $\overline{b}=(-2;0;2)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{a}=(2;-1;3)$, $\overline{b}=(0;2;-1)$, $\overline{c}=(2;3;-3)$.

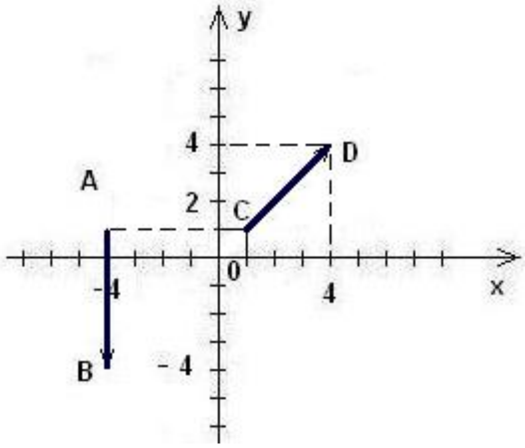
6.Разложите вектор $\overline{c}=(-4;13)$ по векторам $\overline{a}=(5;4)$ и $\overline{b}=(1;-1)$.

7. Найдите длину вектора $2\left(\overline{p}+\dfrac{\overline{q}}{3}\right)$, если

$\overline{p}=3\overline{a}-2\overline{b},\ \overline{q}=3\overline{a}+6\overline{b},\ \left|\overline{a}\right|=2,\ \left|\overline{b}\right|=4,\ \angle\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\dfrac{7\pi}{6}$.

Вариант 11.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $|\overline{AB}|$, $|\overline{CD}|$.

3. Найдите $\overline{AB} + \overline{CD}$.

4. Являются ли векторы $\overline{a} = (5;1;-4)$ и $\overline{b} = (-1;-3;-2)$ параллельными (ортогональными)?

5. Найдите смешанное произведение векторов

$\overline{a} = (7;-2;0)$, $\overline{b} = (4;2;1)$, $\overline{c} = (1;-2;1)$.

6.Разложите вектор $\overline{c} = (-5;14)$ по векторам

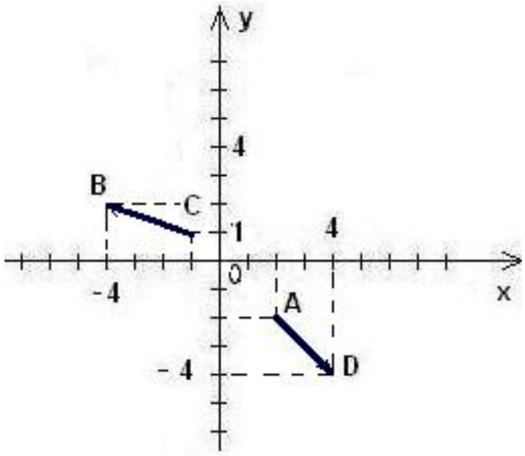
$\overline{a} = (5;4)$ и $\overline{b} = (1;-1)$.

7. Найдите длину вектора $3\left(\overline{p} - \dfrac{\overline{q}}{3}\right)$, если

$\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b},\ \overline{q} = \overline{a} + 2\overline{b},\ |\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 3, \angle(\overline{a}, \overline{b}) = \dfrac{\pi}{6}$.

Вариант 12.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$.

3. Найдите $2 \cdot \overline{AB} + \overline{AD}$.

4. Найдите $\left|\overline{AB} \times \overline{CD}\right|$, если $\overline{AB} = (2;0;-2)$ и $\overline{CD} = (3;-1;-2)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов

$\overline{a} = (3;-2;0)$, $\overline{b} = (2;-1;1)$, $\overline{c} = (4;-2;1)$.

6.Разложите вектор $\overline{c} = (3;-1)$ по векторам

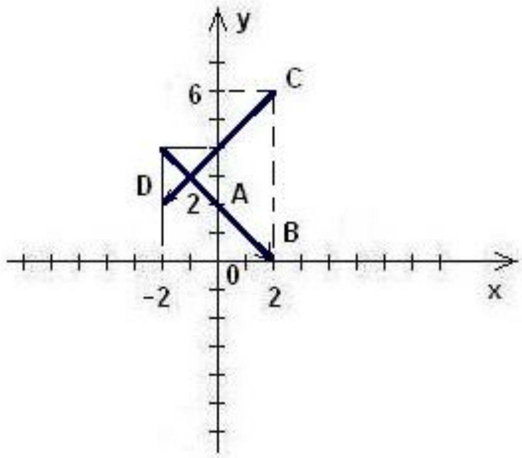
$\overline{a} = (2;-3)$ и $\overline{b} = (1;2)$.

7. Найдите длину вектора $2\overline{p} - 4\overline{q}$, если

$\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b}, \overline{q} = 3\overline{a} + 2\overline{b}, \left|\overline{a}\right| = 2, \left|\overline{b}\right| = 3, \angle(\overline{a}, \overline{b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Вариант 13.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$.

3. Найдите $\cos\angle\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right)$.

4. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (-2; 0; 3)$ и $\overline{b} = (2; -3; -1)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов

$\overline{a} = (2; 0; -1)$, $\overline{b} = (1; -2; 1)$, $\overline{c} = (-3; 0; 1)$.

6.Разложите вектор $\overline{c} = (4; 1)$ по векторам

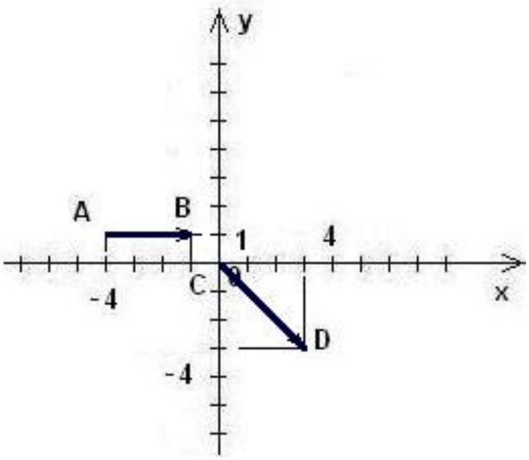
$\overline{a} = (2; -3)$ и $\overline{b} = (1; 2)$.

7. Найдите длину вектора $\overline{p} - 3\overline{q}$, если

$\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b}, \overline{q} = \overline{a} + 2\overline{b}, \left|\overline{a}\right| = 2, \left|\overline{b}\right| = 1, \angle\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 14.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$.

3. Найдите $2 \cdot \overline{AB} + \overline{CD}$.

4. Найдите $\left|\overline{AB} \times \overline{CD}\right|$, если

$\overline{AB} = (1; 0; -2)$ и $\overline{CD} = (3; -3; 2)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов

$\overline{a} = (3; -1; 0)$, $\overline{b} = (2; -1; 1)$, $\overline{c} = (4; -2; 1)$.

6.Разложите вектор $\overline{c} = (5; 3)$ по векторам

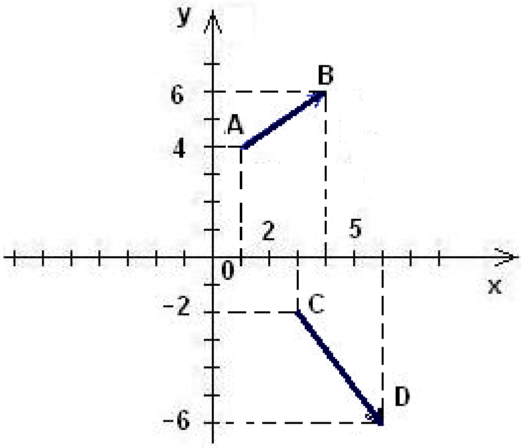
$\overline{a} = (2; -3)$ и $\overline{b} = (1; 2)$.

7. Найдите длину вектора $2\overline{p} \times \overline{q}$, если

$\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b}, \overline{q} = 3\overline{a} + 2\overline{b}, \left|\overline{a}\right| = 2, \left|\overline{b}\right| = 3, \angle\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Вариант 15.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $|\overline{AB}|$, $|\overline{CD}|$.

3. Найдите $\cos\angle\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)$.

4. Найдите векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ векторов $\overline{a}=(3;-2;0)$ и $\overline{b}=(3;-1;2)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{a}=(5;-3;0)$, $\overline{b}=(2;1;-2)$, $\overline{c}=(0;-4;1)$.

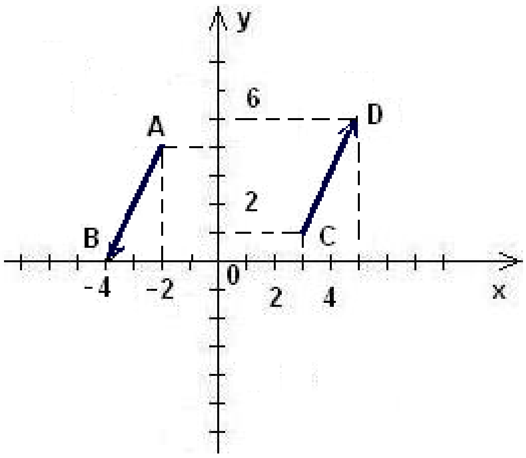
6.Разложите вектор $\overline{c}=(6;5)$ по векторам $\overline{a}=(-2;-3)$ и $\overline{b}=(1;2)$.

7. Найдите длину вектора $\overline{p}\times\overline{q}$, если

$$\overline{p}=3\overline{a}-\overline{b},\ \overline{q}=5\overline{a}+2\overline{b},\ |\overline{a}|=2,\ |\overline{b}|=3,\ \angle\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

Вариант 16.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $|\overline{AB}|$, $|\overline{CD}|$.

3. Найдите $\overline{AB} - 3\cdot\overline{CD}$.

4. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (-1; 3; -2)$ и $\overline{b} = (2; 0; 3)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов

$\overline{a} = (-3; -1; 4)$, $\overline{b} = (5; 0; -2)$, $\overline{c} = (2; 4; 0)$.

6.Разложите вектор $\overline{c} = (7;7)$ по векторам

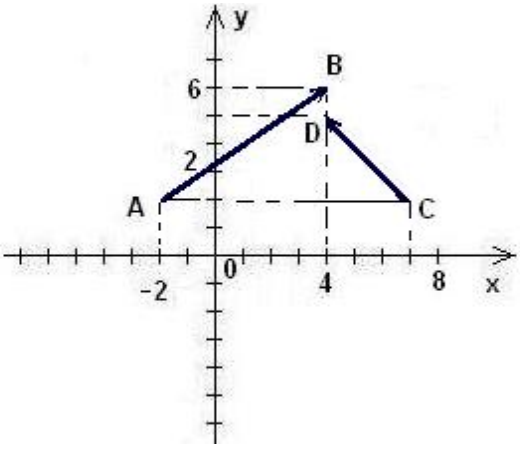
$\overline{a} = (2; -3)$ и $\overline{b} = (1; 2)$.

7. Найдите длину вектора $\dfrac{\overline{p}\times\overline{q}}{2}$, если

$\overline{p} = 5\overline{a} - 2\overline{b},\ \overline{q} = 5\overline{a} + 2\overline{b},\ |\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 3, \angle(\overline{a},\overline{b}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 17.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\overline{CD} \cdot \overline{AB}$.

3. Найдите $\cos\angle\left(\overline{CD}, \overline{AB}\right)$.

4. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a} = (3; -1; 2)$ и $\overline{b} = (-2; 1; 0)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов

$\overline{a} = (2; -3; 1)$, $\overline{b} = (0; -3; -1)$, $\overline{c} = (2; 1; -3)$.

6.Разложите вектор $\overline{c} = (8; 9)$ по векторам

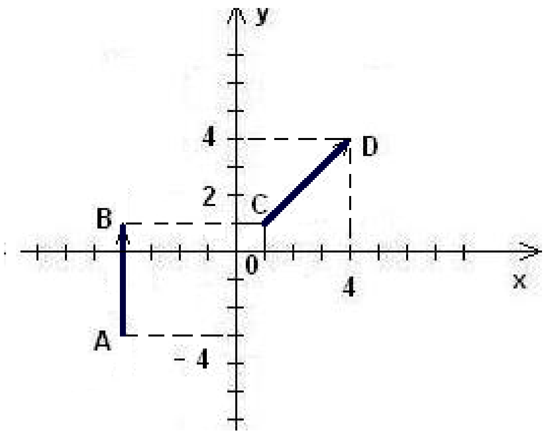
$\overline{a} = (2; -3)$ и $\overline{b} = (1; 2)$.

7. Найдите длину вектора $\dfrac{\overline{p} \times \overline{q}}{4}$, если

$\overline{p} = 3\overline{a} - 5\overline{b}$, $\overline{q} = 3\overline{a} + 5\overline{b}$, $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 3$, $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Вариант 18.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $|\overline{AB}|$, $|\overline{CD}|$.

3. Найдите $\overline{AB} + \overline{CD}$.

4. Являются ли векторы $\overline{a} = (5; -2; 3)$ и $\overline{b} = (-5; -3; 2)$ параллельными?

5. Найдите смешанное произведение векторов

$\overline{a} = (-2; 1; 0)$, $\overline{b} = (4; 2; 1)$, $\overline{c} = (1; -5; -1)$.

6.Разложите вектор $\overline{c} = (9; 11)$ по векторам

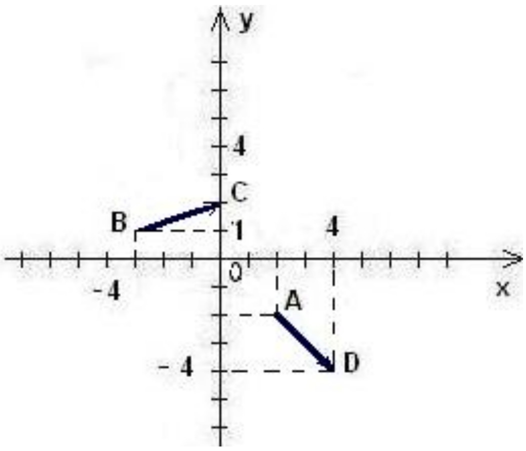
$\overline{a} = (2; -3)$ и $\overline{b} = (1; 2)$.

7. Найдите длину вектора $2\overline{p} \times \overline{q}$, если

$\overline{p} = \overline{a} - 2\overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a} + 2\overline{b}$, $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 3$, $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \dfrac{\pi}{6}$.

Вариант 19.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$.

3. Найдите $2 \cdot \overline{AB} + \overline{AD}$.

4. Найдите $\left|\overline{AB} \times \overline{CD}\right|$, если $\overline{AB} = (1; 2; -1)$ и $\overline{CD} = (3; -4; -2)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{a} = (3; 2; 0)$,
$\overline{b} = (2; -3; 1)$, $\overline{c} = (4; 1; 1)$.

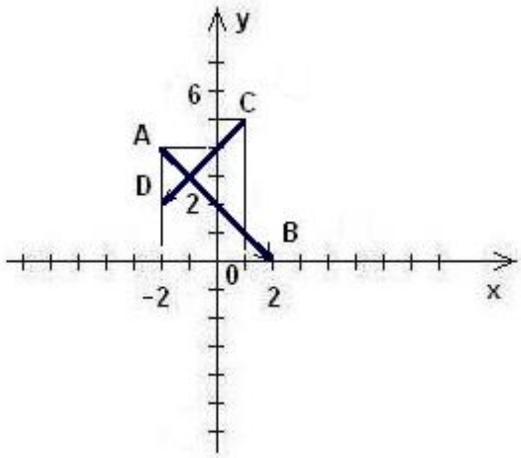
6. Разложите вектор $\overline{c} = (10; 13)$ по векторам $\overline{a} = (2; -3)$ и $\overline{b} = (1; 2)$.

7. Найдите длину вектора $2\overline{p} \times \overline{q}$, если

$$\overline{p} = 3\overline{a} - 4\overline{b},\ \overline{q} = 3\overline{a} + 4\overline{b},\ |\overline{a}| = 1,\ |\overline{b}| = 3,\ \angle(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\pi}{3}.$$

Вариант 20.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$.

3. Найдите $\cos\angle\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right)$.

4. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (0; -2; 1)$ и $\overline{b} = (2; -3; -1)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{a} = (2; -4; 3)$, $\overline{b} = (0; -1; 1)$, $\overline{c} = (-3; 0; 1)$.

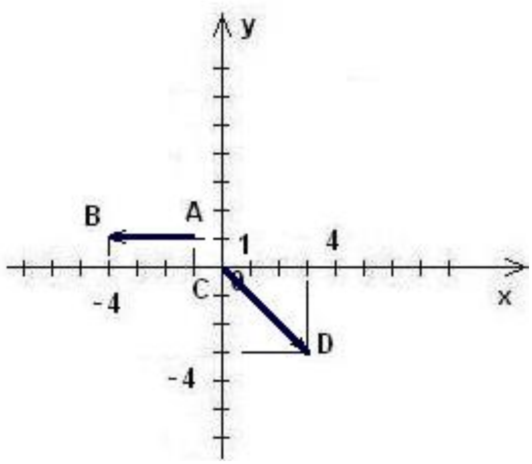
6.Разложите вектор $\overline{c} = (11; 15)$ по векторам $\overline{a} = (2; -3)$ и $\overline{b} = (1; 2)$.

7. Найдите длину вектора $2\overline{p} \times \overline{q}$, если

$$\overline{p} = 4\overline{a} - 2\overline{b},\ \overline{q} = 4\overline{a} + 2\overline{b},\ \left|\overline{a}\right| = 2,\ \left|\overline{b}\right| = 1, \angle\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Вариант 21.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$.

3. Найдите $2 \cdot \overline{AB} + \overline{CD}$.

4. Найдите $\left|\overline{AB} \times \overline{CD}\right|$, если $\overline{AB} = (2;0;-3)$ и $\overline{CD} = (3;2;-2)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{a} = (3;-2;0)$, $\overline{b} = (2;-1;1)$, $\overline{c} = (4;-5;1)$.

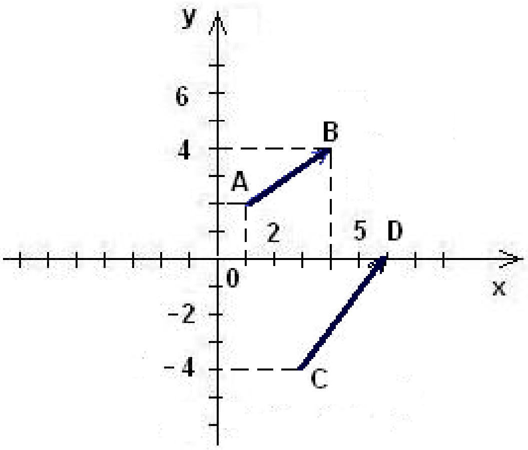
6.Разложите вектор $\overline{c} = (12;17)$ по векторам $\overline{a} = (2;-3)$ и $\overline{b} = (1;2)$.

7. Найдите длину вектора $2\overline{p} - 3\overline{q}$, если

$$\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b},\ \overline{q} = 3\overline{a} + 2\overline{b},\ \left|\overline{a}\right| = 2,\ \left|\overline{b}\right| = 3, \angle\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Вариант 22.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\left|\overline{AB}\right|$, $\left|\overline{CD}\right|$.

3. Найдите $\cos\angle\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)$.

4. Найдите векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$ векторов $\bar{a}=(5;-4;0)$ и $\bar{b}=(-6;-1;2)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов $\bar{a}=(5;5;0)$, $\bar{b}=(2;-1;-2)$, $\bar{c}=(1;-1;2)$.

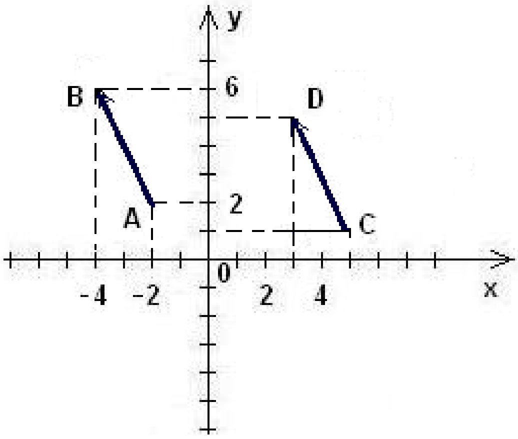
6.Разложите вектор $\bar{c}=(5;-3)$ по векторам $\bar{a}=(2;-1)$ и $\bar{b}=(3;-2)$.

7. Найдите длину вектора $2\bar{p}+\bar{q}$, если

$\bar{p}=3\bar{a}-2\bar{b}$, $\bar{q}=3\bar{a}+2\bar{b}$, $\left|\bar{a}\right|=2$, $\left|\bar{b}\right|=3$, $\angle\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

Вариант 23.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $|\overline{AB}|$, $|\overline{CD}|$.

3. Найдите $\overline{AB} - 3 \cdot \overline{CD}$.

4. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (6; -3; 1)$ и $\overline{b} = (2; 0; -5)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{a} = (3; -1; 2)$, $\overline{b} = (3; 0; -2)$, $\overline{c} = (2; 1; 0)$.

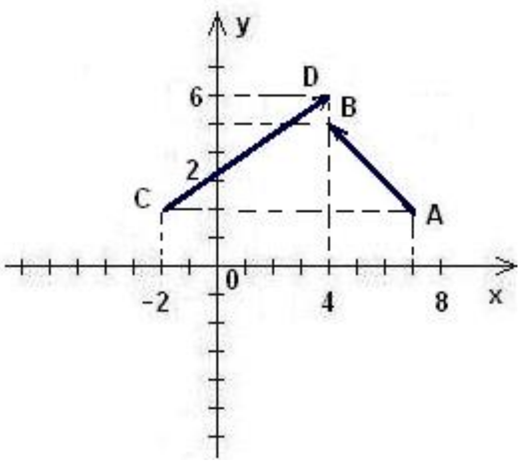
6.Разложите вектор $\overline{c} = (7; -4)$ по векторам $\overline{a} = (-2; 1)$ и $\overline{b} = (3; -2)$.

7. Найдите длину вектора $2\overline{p} - 5\overline{q}$, если

$$\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b},\ \overline{q} = 3\overline{a} + 2\overline{b},\ |\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 3,\ \angle(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\pi}{6}.$$

Вариант 24.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\overline{CD} \cdot \overline{AB}$.

3. Найдите $\cos\angle\left(\overline{CD}, \overline{AB}\right)$.

4. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a} = (3;\, 2;\, -1)$ и $\overline{b} = (-2;\, 0;\, 3)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{a} = (2;\, -4;\, 1)$, $\overline{b} = (0;-3;-1)$, $\overline{c} = (2;\, 6;\, -3)$.

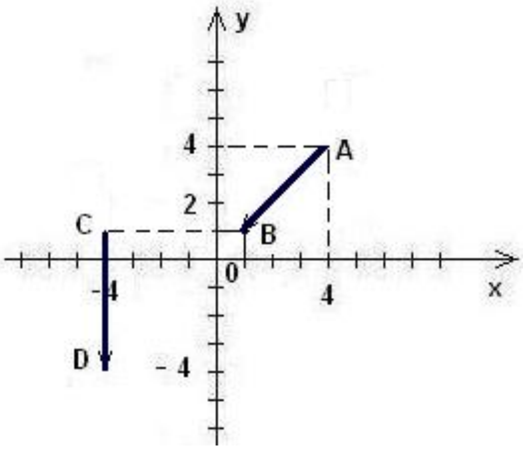
6.Разложите вектор $\overline{c} = (9;\, -5)$ по векторам $\overline{a} = (-2;1)$ и $\overline{b} = (3;\, -2)$.

7. Найдите длину вектора $2\overline{p} - \overline{q}$, если

$$\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b},\ \overline{q} = 3\overline{a} + 5\overline{b},\ |\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 3, \angle\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Вариант 25.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $|\overline{AB}|$, $|\overline{CD}|$.

3. Найдите $\overline{AB}+\overline{CD}$.

4. Являются ли векторы $\overline{a}=(5;\,8;-4)$ и $\overline{b}=(-10;-3;-2)$ параллельными?

5. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{a}=(7;-1;0)$, $\overline{b}=(4;2;1)$, $\overline{c}=(1;-1;2)$.

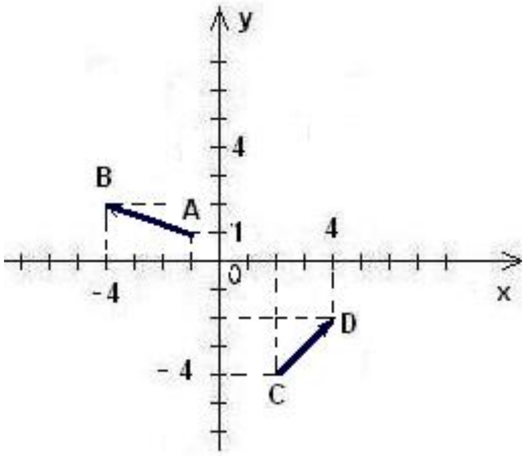
6.Разложите вектор $\overline{c}=(11;-6)$ по векторам $\overline{a}=(-2;1)$ и $\overline{b}=(3;-2)$.

7. Найдите длину вектора $2\overline{p}-3\overline{q}$, если

$\overline{p}=3\overline{a}-2\overline{b},\ \overline{q}=3\overline{a}+5\overline{b},\ |\overline{a}|=2,\ |\overline{b}|=3,\ \angle(\overline{a},\overline{b})=\dfrac{5\pi}{4}$.

Вариант 26.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$.

3. Найдите $2 \cdot \overline{AB} + \overline{AD}$.

4. Найдите $\left|\overline{AB} \times \overline{CD}\right|$, если $\overline{AB} = (5;0;-1)$ и $\overline{CD} = (3;-6;-2)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{a} = (3;-2;0)$, $\overline{b} = (2;-1;1)$, $\overline{c} = (4;-2;1)$.

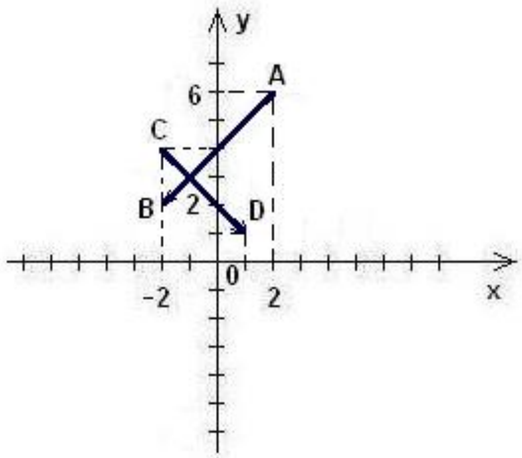
6.Разложите вектор $\overline{c} = (13;-7)$ по векторам $\overline{a} = (-2;1)$ и $\overline{b} = (3;-2)$.

7. Найдите длину вектора $\overline{p} \times \overline{q}$, если

$$\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b},\ \overline{q} = 3\overline{a} + 5\overline{b},\ \left|\overline{a}\right| = 2,\ \left|\overline{b}\right| = 3,\ \angle\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Вариант 27.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$.

3. Найдите $\cos\angle\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right)$.

4. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (0; -2; 5)$ и $\overline{b} = (2; -5; 3)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{a} = (2; 0; 3)$, $\overline{b} = (1; -2; 1)$, $\overline{c} = (-4; 0; 1)$.

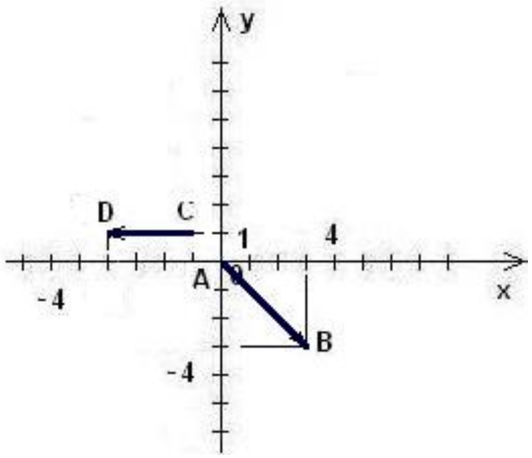
6.Разложите вектор $\overline{c} = (13; -7)$ по векторам $\overline{a} = (-2; 1)$ и $\overline{b} = (3; -2)$.

7. Найдите длину вектора $2\overline{p} - \overline{q}$, если

$\overline{p} = 3\overline{a} - 5\overline{b},\ \overline{q} = 3\overline{a} + 5\overline{b},\ |\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 3, \angle\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Вариант 28.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$.

3. Найдите $2 \cdot \overline{AB} + \overline{CD}$.

4. Найдите $\left| \overline{AB} \times \overline{CD} \right|$, если $\overline{AB} = (2;0;-2)$ и $\overline{CD} = (3;2;-2)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{a} = (3;-2;0)$, $\overline{b} = (2;-1;1)$, $\overline{c} = (4;-5;1)$.

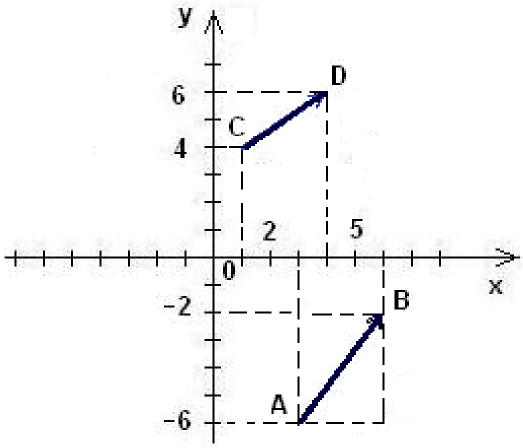
6. Разложите вектор $\overline{c} = (0;\,2)$ по векторам $\overline{a} = (1;1)$ и $\overline{b} = (-1;\,1)$.

7. Найдите длину вектора $2\overline{p} - 3\overline{q}$, если

$$\overline{p} = \overline{a} - 2\overline{b},\ \overline{q} = \overline{a} + 5\overline{b},\ \left|\overline{a}\right| = 2,\ \left|\overline{b}\right| = 3,\ \angle\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \frac{5\pi}{4}.$$

Вариант 29.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $\left|\overline{AB}\right|$, $\left|\overline{CD}\right|$.

3. Найдите $\cos\angle\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)$.

4. Найдите векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ векторов $\overline{a}=(5;-7;0)$ и $\overline{b}=(3;-1;2)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{a}=(-2;3;0)$, $\overline{b}=(2;1;-2)$, $\overline{c}=(-2;1;-1)$.

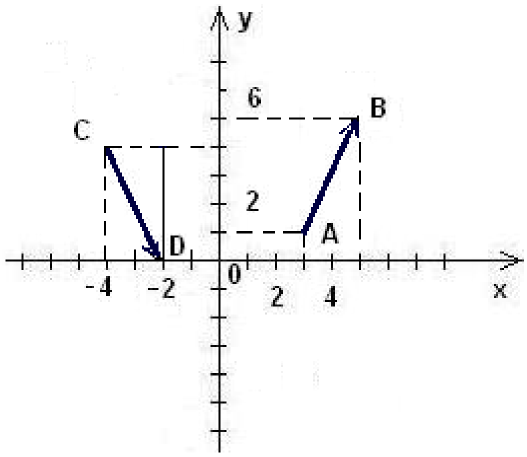
6.Разложите вектор $\overline{c}=(-5;\,9)$ по векторам $\overline{a}=(1;-2)$ и $\overline{b}=(-2;\,3)$.

7. Найдите длину вектора $2\overline{p}\times\overline{q}$, если

$$\overline{p}=7\overline{a}-2\overline{b},\ \overline{q}=3\overline{a}+\overline{b},\ \left|\overline{a}\right|=2,\ \left|\overline{b}\right|=3,\ \angle\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

Вариант 30.

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.



2. Найдите $|\overline{AB}|$, $|\overline{CD}|$.

3. Найдите $\overline{AB} - 3 \cdot \overline{CD}$.

4. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (4; -5; 1)$ и $\overline{b} = (2; 0; 3)$.

5. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{a} = (3; -8; 2)$, $\overline{b} = (5; 0; -2)$, $\overline{c} = (2; 3; 0)$.

6.Разложите вектор $\overline{c} = (5; 4)$ по векторам $\overline{a} = (4; 5)$ и $\overline{b} = (1; -1)$.

7. Найдите длину вектора $2\overline{p} - \overline{q}$, если

$$\overline{p} = 3\overline{a} - 5\overline{b}, \overline{q} = 3\overline{a} + 5\overline{b}, |\overline{a}| = 2, |\overline{b}| = 1, \angle(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\pi}{3}.$$

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ №4 по теме: «Аналитическая геометрия»

№1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

Пусть $\bar{a} = \overline{A_1A_2}$, $\bar{b} = \overline{A_1A_3}$, $\bar{c} = \overline{A_1A_4}$.

Найти:

1) $(\bar{a} + 2\bar{b}) \cdot (\bar{a} - 2\bar{b})$;

2) $(2\bar{a} - \bar{b}) \times \bar{c}$;

3) площадь грани $A_1A_2A_4$;

4) объем пирамиды;

5) уравнение прямой A_1M, где M – середина ребра A_3A_4;

6) уравнение плоскости $A_2A_3A_4$;

7) уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A_3 к грани $A_1A_2A_4$.

1. $A_1(-1;2;1)$, $A_2(-2;2;5)$, $A_3(-3;3;1)$, $A_4(-1;4;3)$.
2. $A_1(-2;1;-1)$, $A_2(-3;1;3)$, $A_3(-4;2;-1)$, $A_4(-2;3;1)$.
3. $A_1(1;1;2)$, $A_2(0;1;6)$, $A_3(-1;2;2)$, $A_4(1;3;4)$.
4. $A_1(-1;-2;1)$ $A_2(-2;-2;5)$, $A_3(-3;-1;1)$, $A_4(-1;0;3)$.
5. $A_1(2;-1;1)$, $A_2(1;-1;5)$, $A_3(0;0;1)$, $A_4(2;1;3)$.
6. $A_1(-1;1;-2)$, $A_2(-2;1;2)$, $A_3(-3;2;-2)$, $A_4(-1;3;0)$.
7. $A_1(1;2;1)$, $A_2(0;2;5)$, $A_3(-1;3;1)$, $A_4(1;4;3)$.
8. $A_1(-2;-1;1)$, $A_2(-3;-1;5)$, $A_3(-4;0;1)$, $A_4(-2;1;3)$.
9. $A_1(1;-1;2)$, $A_2(0;-1;6)$, $A_3(-1;0;2)$, $A_4(1;1;4)$.
10. $A_1(1;-2;1)$, $A_2(0;-2;5)$, $A_3(-1;-1;1)$, $A_4(1;0;3)$.
11. $A_1(0;3;2)$, $A_2(-1;3;6)$, $A_3(-2;4;2)$, $A_4(0;5;4)$.
12. $A_1(-1;2;0)$, $A_2(-2;2;4)$, $A_3(-3;3;0)$, $A_4(-1;4;2)$.
13. $A_1(2;2;3)$, $A_2(1;2;7)$, $A_3(0;3;3)$, $A_4(2;4;5)$.
14. $A_1(0;-1;2)$, $A_2(-1;-1;6)$, $A_3(-2;0;2)$, $A_4(0;1;4)$.
15. $A_1(3;0;2)$, $A_2(2;0;6)$, $A_3(1;1;2)$, $A_4(3;2;4)$.
16. $A_1(0;2;-1)$, $A_2(-1;2;3)$, $A_3(-2;3;7)$, $A_4(0;4;1)$.

17. $A_1(2;3;2)$, $A_2(1;3;6)$, $A_3(0;4;2)$, $A_4(2;5;4)$.

18. $A_1(-1;0;2)$, $A_2(-2;0;6)$, $A_3(-3;1;2)$, $A_4(-1;2;4)$.

19. $A_1(2;0;3)$, $A_2(1;0;7)$, $A_3(0;1;3)$, $A_4(2;2;5)$.

20. $A_1(2;-1;2)$, $A_2(1;-1;6)$, $A_3(0;0;2)$, $A_4(2;1;4)$.

№2. Даны координаты вершин треугольника *ABC*.

Найти:

1) уравнение медианы *AE*;

2) уравнение и длину высоты *CD*;

3) уравнение прямой, проходящей через точку *E* параллельно стороне *AB*.

1. *A(1;-1), B(4;3), C(5;1)*.
2. *A(0;-1), B(3;3), C(4;1)*.
3. *A(1;-2), B(4;2), C(5;0)*.
4. *A(2;-2), B(5;2), C(6;0)*.
5. *A(0;0), B(3;4), C(4;2)*.
6. *A(0;1), B(3;5), C(4;3)*.
7. *A(3;-2), B(6;2), C(7;0)*.
8. *A(3;-3), B(6;1), C(7;-1)*.
9. *A(-1;1), B(2;5), C(3;3)*.
10. *A(4;0), B(7;4), C(8;2)*.
11. *A(2;2), B(5;6), C(6;4)*.
12. *A(4;-2), B(7;2), C(8;0)*.
13. *A(0;2), B(3;6), C(4;4)*.
14. *A(4;1), B(7;5), C(8;3)*.
15. *A(3;2), B(6;6), C(7;4)*.
16. *A(-2;1), B(1;5), C(2;3)*.
17. *A(4;-3), B(7;1), C(8;-1)*.
18. *A(-2;2), B(1;6), C(2;4)*.
19. *A(5;0), B(8;4), C(9;2)*.
20. *A(2;3), B(5;7), C(6;5)*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. − М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. − 312 с.

2. Жуков, В. М. Практические задания по математике: теория, задания, ответы / В. М. Жуков. − Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 704 с.

3. Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М.: Наука, 1999. – 280 с.

4. Топольский Н.Г., Тараканов Д.В., Михайлов К.А. Теоретические основы поддержки управления пожарными подразделениями на основе мониторинга динамики пожара в здании: Монография / Под общей редакцией д-ра техн. наук, профессора Н.Г. Топольского – М.: Академия ГПС МЧС России, 2019. – 320 с.

Хонгорова Ольга Викторовна
Есина Марина Геннадьевна

МАТЕМАТИКА: ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие
по специальности 20.02.04 «Пожарная безопасность»
квалификация базовой подготовки «Техник»

Подготовлено к изданию 29.05.2020 г.
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 13,3. Уч.-изд. л. 12,4. Заказ № 76
Отделение организации научных исследований
научно-технического отдела
Ивановской пожарно-спасательной академии ГПС МЧС России
153040, г. Иваново, пр. Строителей, 33